CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 12
Otoño 2023
Aproximación polinomial y teorema de Taylor. Residuo y estimación del error de aproximación

1. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado n generado por $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$.
   (b) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, $x_0 = 0$.
   (c) $f(x) = x^2 - x - 2$, $x_0 = -1$.

2. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado 2 generado por $f(x)$ en x_0:

   (a) $f(x) = 3 + \displaystyle\int_2^{2x} e^{t^2-4}\, dt$, $x_0 = 1$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$, $x_0 = 0$.

3. A partir del polinomio de Taylor de grado n para e^x en $x_0 = 0$ determina el polinomio de Taylor de grado 3 generado por las siguientes funciones $f(x)$ en $x_0 = 0$:

   (a) $f(x) = e^{-2x}$.
   (b) $f(x) = e^{-x^2}$.
   (c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

4. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 generado por $f(x) = \tan^{-1}(x)$ en $x_0 = 0$, y úsalo para aproximar el valor de $\pi/4$.

5. (a) Demuestra que si $|x|$ es pequeño y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

   $$(x+1)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2.$$

   (b) Usa esta aproximación para estimar $\sqrt{1.4}$.

6. (a) Determina el polinomio de Taylor de orden 3, $P_3(x)$, generado por $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en $x_0 = 2$.
   (b) Estima el error cometido al utilizar P_3 para aproximar el valor de $\dfrac{2}{2.2}$.

7. Aproxima el valor de $e^{1/2}$ con un error menor que 0.001.

8. Determina la exactitud de la aproximación

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

sobre el intervalo $[-1, 1]$.

9. Usando el teorema de Taylor, demuestra que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^5(\mathbb{R})$ con polinomio de Taylor de grado 5 en $x_0 = 1$ dado por

$$P_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Determina $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$, e indica si f tiene o no un extremo local en el punto 1.

11. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada continua en $\mathbb{R}^+$, tal que $f'(1) = 0$ y $f''(1) = -2$. Sea $\phi(x) = f(e^x)$.

    (a) Calcula $\phi'(0)$ y $\phi''(0)$. ¿Podrá garantizarse que ϕ admite un extremo local en $x = 0$? ¿Máximo o mínimo?

    (b) Escribe la fórmula de Taylor para la función ϕ en $x_0 = 0$ con residuo de orden 1, y utilízala para calcular

    $$\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2}.$$

12. Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $f \in C^3(I)$. Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$