CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 13
Otoño 2023
Sucesiones de números reales. Series geeométricas y telescópicas

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{\tan^{-1}\left(n^2\right)}{\ln(1+n)}$.

   (b) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

   (c) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (d) $a_n = n - \ln\left(3e^n + 1\right)$.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

   (f) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (g) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

   (h) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (i) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

2. Demuestra que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a,b), \quad a, b > 0.$

3. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx.$

   (a) Demuestra, justificando con detalle, que
   $$I_n = n \ln\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

   (b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

4. En cada inciso, encuentra el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}\,, \quad c_0, b, t_0 > 0$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right)$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\,(2n+3)}$. Sugerencia: utiliza fracciones parciales.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. Sugerencia: utiliza fracciones parciales.