

Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

Laboratorio 12: Integrales dobles, Teorema de Fubini, Integrales dobles iteradas

1. Calcular el valor de las integrales dobles y dibujar en el plano xy el dominio de integración:

(a) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx.$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} y \sin(x) dy dx.$

(c) $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x + y^2) dx dy.$

(d) $\int_0^1 \int_{-2}^2 \frac{y}{1+x^2} dx dy.$

2. Calcular $\iint_D (x - y) dx dy$, donde D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$.

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Muestra que $2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$

Sugerencia: Muestra primero que $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 = \iint_D f(x)f(y) dx dy$, donde $D = [a, b] \times [a, b]$.

4. Calcular $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} dx dy$. Sugerencia: Cambiar el orden de integración.

5. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $g(x) \leq f(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$. Muestra que $\iint_D 1 dx dy = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. (Notar que en Cálculo Integral de una variable, la última integral es la definición del área de D).

6. Sea D la región en el plano xy encerrada por las curvas $x = 3y^2$ y $x = 1 - y^2$. Encuentra el valor de $\iint_D (x + 2y) dx dy$.

7. (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) ¿Cuál es el volumen del sólido en el espacio xyz acotado por las superficies $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 0$ y $z = y + 3$?

A) $8/3$ B) $16/3$ C) $32/3$ D) $104/105$ E) $208/105$