

Funciones Monótonas y Extremos locales

1. Sea $f(x) = ax + \frac{b}{x}$.
 - (a) Calcular los valores de a y b para que la gráfica de f tenga un mínimo local en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.
 - (b) Para los valores de a y b obtenidos en el inciso anterior, calcula las asíntotas y los intervalos de monotonía de $f(x)$.
 - (c) Esboza la gráfica de $f(x)$.
2. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a, b, c y d parámetros reales. Determina los valores de a, b, c y d de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones: $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -1$, su gráfica corta el eje x en el punto de abscisa $x = -2$, tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.
3. Mostrar que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$, donde a y b son parámetros reales diferentes de cero, siempre tiene un máximo y un mínimo local. Sugerencia: localizar extremos locales y utilizar criterio de segunda derivada.
4. Determina los extremos locales de la función $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right)$.

Concavidad/Convexidad, Puntos de Inflexión

5. Responde las siguientes preguntas sobre puntos de inflexión:
 - (a) Da un ejemplo de una función f tal que $x = c$ no sea un punto de inflexión pero se cumpla $f''(c) = 0$.
 - (b) Muestra que $f(x) = x|x|$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$ y que $f''(0)$ no existe.
6. Determinar los valores de b de tal forma que la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Gráficas

7. Esbozar las siguientes funciones con todos sus elementos y etiquetarlos claramente en la gráfica (dominio, paridad, intersección con los ejes, asíntotas, puntos críticos e intervalos de monotonía, máximos y/o mínimos, intervalos de concavidad):
 - (a) $f(x) = x^5 - 5x^3$
 - (b) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$
 - (c) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2}$
 - (d) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$
 - (e) $f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$
 - (f) $f(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$

8. Esboza la gráfica de una función $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ que es derivable excepto en $x = -2$ y $x = 2$, la cual cumpla con las siguientes características:

(a) $f'(x) > 0$, para $x \in [-4, -2) \cup (-1, 2)$.

(b) $f'(x) < 0$, para $x \in (-2, -1) \cup (2, 4]$.

(c) $f'(-1) = 0$.

(d) $f''(x) > 0$ para $x \in (-2, 2)$.

(e) $f''(x) < 0$ para $x \in [-4, -2) \cup (2, 4]$.