

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 8

Otoño 2023

Formas indeterminadas

1. Sin utilizar la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = 1 \quad (\text{cambia variable}).$$

2. Justifica si el límite en cada inciso es, o no, una forma indeterminada. Luego calcula, si existe, el límite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.
- (c) $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{x^{1-a} - 1}{1-a}$, $x > 0$.
- (d) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\sec \theta}{\tan \theta}$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(-1/x^2)}}{x}$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x}$.
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x e^{-t^2} dt}{1 - e^{-x^2}}$.
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x + x^2} - 2}{x}$.
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$.
- (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(1+6x) - \ln(4+3x)]$.
- (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x3^{2/x} - x)$.
- (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x} [\pi - 2 \tan^{-1}(\sqrt{x})])$.
- (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(3e^x + 1))$.
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\cot x}$.
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
- (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$, $a > 0, b > 0$.

3. Deduce cuál es el valor de la constante c tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{cx}{cx+1} \right)^x = 9.$$

4. Determina el valor de $a \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \int_0^{2x} \cosh(t^2 + \ln a) dt \right]^{1/x} = e^{5/2}.$$

5. Sea f una función continua en \mathbb{R} . Demuestra que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t) dt \right)^x = e^{f(0)}.$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1/x}$.

- (a) Determina $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- (b) Determina los intervalos de monotonía, extremos, concavidades y puntos de inflexión de f .
- (c) Dibuja la gráfica de f .