Laboratorio 11

Otoño 2023

Fracciones parciales. Integrales impropias

1. Utiliza fracciones parciales para determinar las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2-2x}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{3x^3-3x^2+5x+3}{1-x^4}\,dx.$

2. Determina

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}. \quad \text{(Usa una sustitución trigonométrica.)}$$

   Ahora obtén

$$\int \frac{2-x+x^2-x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

3. Usando el cambio de variable indicado, determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones:

   (a) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad u=\cosh x.$

   (b) $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}, \quad u=\cos x.$

4. Calcula la integral impropia de primera especie, o muestra que diverge:

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+5x)}.$

   (b) $\displaystyle\int_{\ln 2}^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}}dx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x|\,e^{-x^2}dx.$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-3|x-2|}\,dx.$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+9}dx.$

5. Calcula la integral impropia de segunda especie, o muestra que diverge:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x)dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}dx.$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}}dr.$

   (e) $\displaystyle\int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad t \geq 0.$

   (f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}.$

   (g) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{b-x}}, \qquad a < b$ dados.

6. Calcula la integral impropia de tercera especie, o muestra que diverge:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}dx.$

7. Determina para qué valores de p converge la integral en cada inciso:

   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^p}.$

   (b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}.$

8. (a) Demuestra que

   $$\int \frac{1}{2e^x - e^{2x}}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}\ln|2-e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   (b) Usando el inciso anterior, calcula

   $$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{2e^x - e^{2x}}dx.$$

9. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

   (a) Determina el dominio D de f y justifica que $\int_2^4 f(x)dx$ es una integral impropia.

   (b) Demuestra que
$$\lim_{\alpha \to 2} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)dx = 1.$$