Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

Laboratorio 7: Aproximaciones Lineales y Cuadráticas

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xy - z^2 + e^{x-2z}$. Encuentra la aproximación lineal y la aproximación cuadrática de f en el punto $(2, 0, 1)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. De la función f se conoce la siguiente información: $f(-1, 2) = 3$, las derivadas direccionales de f en $(-1, 2)$ en las direcciones de los vectores $\vec{v}_1 = (1, -1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1)$ son 2 y 4 respectivamente. Encuentra la aproximación lineal de f en el punto $(-1, 2)$. ¿Qué aproximación a $f(-3/2, 3/2)$ da la aproximación lineal anterior?

3. Si $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^1, la aproximación lineal de $\mathbf{F}$ en el punto $\vec{x}_0$ se define como la función $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $\mathbf{L}(\vec{x}) = \mathbf{F}(\vec{x}_0) + \mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$, donde $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ y $\mathbf{F}(\vec{x}_0)$ son vectores columna. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy - z, z^2 - x)$. Encuentra la aproximación lineal de $\mathbf{F}$ en el punto $(2, 3, 1)$.

4. (Método de Newton) Un sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f_n(x_1, ..., x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x}))$. Entonces, el sistema de ecuaciones se escribe como

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \vec{0} = (0, 0, ..., 0).$$

Para aproximar un vector solución del sistema de ecuaciones, el *método de Newton* usa una aproximación inicial $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, para luego generar una nueva aproximación $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ que se obtiene como sigue: Si $\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la aproximación lineal de $\mathbf{F}$ en el punto $\vec{x}_0$, entonces $\vec{x}_1$ satisface $\mathbf{L}(\vec{x}_1) = \vec{0}$. Suponiendo que $\mathbf{F}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y que $\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x}_0)$ es invertible, demuestra que $\vec{x}_1$ está dado por

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (\mathrm{D}\mathbf{F}(\vec{x}_0))^{-1}\mathbf{F}(\vec{x}_0).$$

Nota: Para obtener una siguiente aproximación $\vec{x}_2$, se reemplaza $\vec{x}_0$ por $\vec{x}_1$ en la ecuación anterior. La fórmula de Taylor de orden 1 se usa para mostrar que bajo ciertas hipótesis, el método de Newton converge muy rápido (convergencia cuadrática).

5. Considera el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x^2 - \cos(x-2y) - 1 &= 0 \qquad (1)\\
x^3 - xy^2 + 1 &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

   Si $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (2,1)$ es una aproximación inicial a un vector solución del sistema de ecuaciones, encuentra la siguiente aproximación dada por el método de Newton.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Los puntos críticos (o estacionarios) de f son las soluciones del sistema de n ecuaciones con n incógnitas $\nabla f(x_1, ..., x_n) = \vec{0}$. En muchos problemas prácticos no es posible resolver el sistema de manera analítica por lo que se usan algoritmos para aproximar los puntos críticos. Si $\vec{x}_0$ es una aproximación inicial a un punto crítico, demuestra que el método de Newton aplicado al sistema $\nabla f(x_1, ..., x_n) = \vec{0}$ produce una siguiente aproximación $\vec{x}_1$ dada por $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (H_f(\vec{x}_0))^{-1}\nabla f(\vec{x}_0)$, donde $H_f(\vec{x}_0)$ es la *matriz hessiana* de f en $\vec{x}_0$.