Teorema de Bolzano / Teorema Valor Intermedio

1. Muestre que la ecuación
$$\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$$
tiene al menos una solución real.

2. Muestre que las curvas definidas por las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se intersectan para algún valor de la abcisa $x \in (2\pi, 5\pi/2)$.

3. Dada $k > 0$ una constante fija, demuestre que existe $x_0 \in (0, k+1)$ tal que $x_0^2 = k$.

4. Muestra que la función $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ toma el valor $(a+b)/2$ para algún x.

5. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$
   (a) Muestra que si $0 \leq \gamma \leq 2$ entonces existe un $c \in [0,2]$ de tal forma que $f(c) = \gamma$, es decir, f toma todos los valores entre 0 y 2.
   (b) Explicar si es posible aplicar el teorema de Bolzano para resolver el inciso anterior.

6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestra que existe $c \in [0,1]$ que satisface $f(c) = c$. Nota: al punto $x = c$ se le conoce como punto fijo de f.

Definición derivada

7. Utiliza la definición de derivada (límites) para encontrar:
   (a) la derivada de $f(x) = \sqrt{x+5}$ en el punto $x = 4$,
   (b) la función derivada de $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

Funciones diferenciables

8. Explicar en qué puntos la función
$$f(x) = |x^2 - 4|$$
es diferenciable.

9. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(5-5x)}{x-1} & \text{si } \ x \neq 1, \\ -5 & \text{si } \ x = 1, \end{cases}$$

Verifica que $f(x)$ es continua en $x = 1$ y muestra que

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0.$$

Interpretación geométrica de la derivada

10. Encuentra la ecuación de la línea recta que tiene pendiente $\frac{1}{4}$ y que es tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

11. Determina la ordenada y abcisa al origen de la recta perpendicular a la gráfica de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $(1, 2)$.