Tasas relacionadas

1. Una partícula P se mueve en el primer cuadrante del plano xy sobre la parábola $x = y^2$, de forma que su coordenada x aumenta a razón constante de 5cm/s. Determinar la velocidad con la que la partícula P se aleja del origen cuando $x = 9$.

2. Una partícula se desplaza en el plano xy sobre la curva $4y = x^2 + 2x$. Suponiendo que x y y dependen del tiempo, determinar las coordenadas del punto sobre la curva en el que las tasas de cambio con respecto al tiempo de la abscisa y de la ordenada sean iguales.

3. Un depósito cónico (cono circular recto), apoyado en su vértice, se llena a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros, y el radio de la tapadera de 5 metros, determinar la rapidez con la que se eleva el nivel del agua cuando este va a una altura de 6 metros dentro del cono. Nota: el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4. Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3600mi/h?

5. El volumen de una esfera decrece a una razón de $12\pi\text{cm}^3/\text{min}$. Determinar la razón a la cuál el radio y la superficie de la esfera cambian cuando su radio es 20cm. Nota: el volumen y superficie de una esfera de radio r están dados respectivamentepor la fórmulas $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.

Teorema Rolle y Teorema Valor Medio

6. Para cada una de los siguientes funciones, justifica si se cumplen o no las condiciones del Teorema de Rolle.
   (a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,
   (b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,
   (c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|$,
   (d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

7. Utilizar el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle para mostrar que la función $f(x) = \cos^2(x) - \text{sen}^2(x) + 3x$ tiene exactamente una raíz real.

8. Considera la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + a, & x < 1, \\ bx + 2, & x \geq 1, \end{cases}$$
con a, b parámetros reales. Determina los valores de a y b para que $f(x)$ cumpla las condiciones del TVM en el intervalo $[0, 2]$ y calcula del punto c que satisface el TVM para ese intervalo.

9. Muestra que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$, $b \in \mathbb{R}$, no puede tener más de una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

10. Considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$, que satisface $f(0) = 1/2$ y $f'(x) \leq -1$ $\forall x \in (0, 1)$. Utiliza el Teorema de Bolzano y el TVM para mostrar f tiene solamente una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.