Departamento de Matemáticas
Cálculo Diferencial e Integral I
Laboratorio 10

Derivada puntual

1. Dada $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, muestra que

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = -\frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{5+h})\sqrt{5}\sqrt{5+h}}$$

y utiliza este resultado para obtener $f'(5)$.

2. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{2023}-1}{x-1}$.

3. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{2ax}, & 0 < x < 4, \\ 1, & x = 4, \\ bx + c, & x > 4. \end{cases}$$

Encuentra todos los valores posibles de $a, b, c \in \mathbb{R}$ de tal modo que $f(x)$ sea diferenciable en $x = 4$ y determina el valor de $f'(4)$.

4. Dadas las funciones diferenciabless f y g, las cuales cuentan con los valores

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

determinar las siguientes derivadas.

(a) $(fg)'(3)$
(b) $(f/g)'(3)$
(c) $F'(2)$, $F(x) = x^2 f(x)$
(d) $G'(2)$, $G(x) = g^2(x)$
(e) $H'(2)$, $H(x) = \dfrac{x}{f(x)g(x)}$

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Muestra que para $n = 1$ la función f es continua en $x = 0$ pero $f'(0)$ no existe.
(b) Muestra que para $n = 2$ la función f es continua y diferenciable en $x = 0$.

6. Sea $f(x)$ una función diferenciable en x_0. Verificar detalladamente que

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

7. Pruea que si $f(x)$ es diferenciable en x_0 entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ \lambda f'(x_0), & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Funciones diferenciables

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x^2, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

   (a) Muestra que f es continua en todo su dominio.
   (b) Determinar los puntos en los que f es derivable.

9. Sea la familia de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x-1}, & x \in (0,1) \cup (1,\infty), \\ x(b-x), & x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

   (a) Encontrar todos los valores posibles de $a, b \in \mathbb{R}$ de tal modo que $f(x)$ sea diferenciable en $x = 0$.
   (b) Considerando los valores de a y b obtenidos en el inciso anterior, determinar el dominio de $f'(x)$.