

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 5

Otoño 2023

Función exponencial natural. Logaritmos y exponenciales en otras bases

1. Resuelve la ecuación  $3e^x + 2e^{-x} = 7$ .
2. Determina la derivada  $y'$  en cada inciso:

(a)  $y = \frac{1}{e^{2x} \ln x}$ .

(b)  $y = \int_1^{e^{(x^2)}} \ln^2(\sqrt{t}) dt$ . Simplifica el resultado.

(c)  $y = \int_0^{3x} e^{t^2-9x^2} dt$ . Simplifica el resultado.

3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = 2e^{3x} + \int_0^x \sqrt{3 + 2t^4 + t^6} dt.$$

- (a) Justifica que  $f$  es diferenciable.
  - (b) Demuestra que  $f$  posee una inversa  $f^{-1}$  en  $\mathbb{R}$ .
  - (c) Encuentra  $(f^{-1})'(2)$ .
4. Determina la integral en cada inciso:

(a)  $\int_{-\ln 3}^0 \sqrt{e^x} dx$ .

(b)  $\int \frac{\tan(e^{-3x})}{e^{3x}} dx$ .

(c)  $\int e^{(x-e^x)} dx$ .

(d)  $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx$ .

(e)  $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1 - e^x} dx$ .

5. Sea  $f(x) = e^{(2-x)^a} e^{xb}$ ,  $a \neq b$ . Demuestra que existe  $c \in [0, 2]$  tal que

$$f(c) = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2b - 2a}.$$

6. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de  $\frac{\ln(x)}{x}$  en  $(0, \infty)$ .  
 (b) Usando el inciso anterior, demuestra que  $x^e \leq e^x$  para todo  $x > 0$ , y  $x^e = e^x$  si y sólo si  $x = e$ .

7. En cada una de las siguientes expresiones despeja  $y$ :

(a)  $\log_3(1 - y) - \log_3(y) - x = 0, \quad 0 < y < 1.$

(b)  $\frac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3.$

8. Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

(a)  $f(x) = \frac{1}{\log_2(\log_2 x)}.$

(b)  $y = \log_3\left(\frac{3^x}{1 - 3^x}\right).$

(c)  $y = (2^x + 1)^{1/x}.$

(d)  $y = x^x (\ln x)^{\ln x}.$

(e)  $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}.$

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 1$ , si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. Determina las siguientes integrales:

(a)  $\int e^x 10^x dx.$

(b)  $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x} dx.$  Simplifica la respuesta.

(c)  $\int_0^{\log_3 2} \frac{1}{1 + 3^x} dx.$  Simplifica la respuesta.

(d)  $\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{1 - 3^x}} dx.$