

Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

Laboratorio 5: Gradientes y Derivadas Direccionales

- Sea S la superficie en el espacio xyz dada por la ecuación $e^{x+2z} + z^2 = xyz + 4$.
 - Encuentra un vector no nulo en \mathbb{R}^3 que sea normal a S en el punto $(2, 1, -1)$.
 - Encuentra la ecuación del plano tangente a S en el punto $(2, 1, -1)$.
- (Tomado del examen de muestra GRE de Matemáticas) Sea g la función definida por $g(x, y, z) = 3x^2y + z$ para cualesquiera x, y, z reales. ¿Cuál de los siguientes números es el más cercano al valor exacto de la derivada direccional de g en el punto $(0, 0, \pi)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? (Nota: \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores de la base canónica en \mathbb{R}^3 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente.)
A) 0.2 B) 0.8 C) 1.4 D) 2.0 E) 2.6
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3xy + 2xy^2$. Sea γ la curva de nivel de f que pasa por el punto $(2, -2)$. Encuentra un vector no nulo en \mathbb{R}^2 que sea perpendicular a dicha curva en el punto $(2, -2)$. Encuentra la ecuación de la recta tangente a γ en el punto $(2, -2)$ en la forma $y = mx + b$.
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(2, 1) = -4$ y $\nabla f(2, 1) = (3, 4)$. Dada la curva en el plano xy descrita por la ecuación $x^2y + f(x, y) = 0$, encuentra un vector tangente a dicha curva en el punto $(2, 1)$.
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Suponer que γ es una curva de nivel de f que puede ser parametrizada por una trayectoria de clase C^1 , $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, y tal que en t_0 se cumple que $\mathbf{c}'(t_0) \neq (0, 0)$, con $\mathbf{c}(t_0) = (x_0, y_0)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector $\mathbf{c}'(t_0)$?
- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sean \vec{v}_1 y \vec{v}_2 dos vectores en \mathbb{R}^2 linealmente independientes. Supongamos que en un punto (x_0, y_0) se conocen los valores de las derivadas direccionales de f en las direcciones de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 . Describe cómo encontrar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0) usando los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 y las derivadas direccionales respectivas de f en (x_0, y_0) .
- Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y, z) = x^2 - 3xyz + z^3y - 1$. Encuentra la dirección en la que f crece más a partir del punto $(2, 1, -1)$. ¿Cuál es el valor de la máxima razón de crecimiento en dicho punto?
- La distribución de temperaturas (en grados Celsius) sobre la superficie de un lago de aguas termales está dada por la función $T(x, y) = (-x^2 - 2y^2 + xy)/3 + 50$, para $x \in [-8, 8]$, $y \in [-4, 4]$ en coordenadas rectangulares. Un pato se encuentra en el punto $(6, -3)$ sobre el lago. ¿En qué dirección sobre la superficie del lago debe comenzar a nadar el pato si desea seguir la dirección de máximo descenso de la temperatura?

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{4}$. Muestra que no existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que la derivada direccional de f en el punto $(1/2, 2)$ en la dirección de \vec{v} sea 4.