CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 4

Otoño 2023

Función logaritmo natural. Funciones inversas

1. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

   (a) $f(x) = (\ln x) \ln(\operatorname{sen} x)$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$.

   (c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{-\ln x}\right)$.

   (d) $f(x) = \ln^2\left(\dfrac{3x+2}{x^4}\right)$.

   (e) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \ln\left(x^2-1\right)\sqrt{\cos(t)+1}\,dt$.

2. Calcula la derivada y' de la curva $y = \ln(xy^2)$ en el punto $P(e,1)$. Sugerencia: utiliza derivación implícita.

3. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$. (Observa que $\ln e = 1$.)

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2x}$.

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x + x\operatorname{sen}(\ln(x))}\,dx$.

   (d) $\displaystyle\int (1+\ln x)\cot(x\ln x)\,dx$.

   (e) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{3+\sqrt{t+8}}$. Sugerencia: usa la sustitución $u = 3+\sqrt{t+8}$.

4. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2+1)^{5/2}\sqrt{2+\operatorname{sen} x}}, \quad x > 0.$$

5. (a) Prueba que si $t \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

   (b) Concluye que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

6. Determina una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea par, con $f(0) = 0$ y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Sea

$$f(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^2}{1+t} dt, \quad x > 0.$$

Demuestra que

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x)^3}{3}.$$

8. En cada inciso justifica que f es diferenciable y, a partir del signo de la derivada f', encuentra los intervalos en los que f posee una inversa f^{-1}.

   (a) $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$.

   (b) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \ln t\, dt, \ \ 0 < x < 1.$

9. Sea $f(x) = 3 - \ln(x) + \dfrac{2}{x}$.

   (a) Justifica que f posee una inversa f^{-1} en $\mathbb{R}^+$.

   (b) Calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(5)$.

10. Sea f una función invertible, con inversa f^{-1}, y sea $g = \dfrac{1}{f^{-1}}$. Si $f(2) = -3$ y $f'(2) = \dfrac{2}{3}$, encuentra $g'(-3)$.