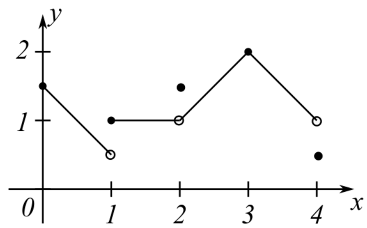
Existencia de límites

1. Para la función cuya gráfica está abajo determina los límites laterales en $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Obtén todos los números reales a en el intervalo $[1, 4]$ para los cuales el límite en $x = a$ existe.



2. Da un contraejemplo si la proposición es falsa, es decir, un ejemplo que sustente la falsedad de la proposición. Si es verdadera la proposición, justifica.
   (a) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ no existe.
   (b) Si ninguno de los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existe entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ no existe.

3. Considere la función
$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2, & |x| \leq 1, \\ -a, & 1 < |x| \leq 2, \\ bx, & x > 2. \end{cases}$$
Determinar los valores de las constantes a y b de tal forma que existan los límites $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ y graficar $f(x)$.

4. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x\,, & x < 1/3\,, \\ 5 + a\,, & x = 1/3\,, \\ 12(x-1)^3 + b\,, & x > 1/3, \end{cases}$$
determinar todos los valores de a y b de tal forma que el límite exista para todo punto en el dominio de $f(x)$.

Propiedades de límites

5. Supón que $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Calcula (justifica cada paso) los límites en $a = 4$ de $g(x) + 3$, $(g(x))^2$, $xf(x)$, $\dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$.

6. Supón que $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 1$, utiliza propiedades de los límites para demostrar que $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = 0$

7. Prueba que si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ entonces $\lim_{x\to 2} f(x+1) = 4$.

8. Suponiendo que los límites $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ existen y que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, demostrar que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Límites con definición

9. Calcula cada uno de los siguientes límites, posteriormente demuestra utilizando la definición (ϵ y δ) que tu cálculo es correcto.

   (a) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+1}$.

   (b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+2}$.

   (c) $\lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$.

   (d) $\lim_{x\to -1} |5x-7|$.

   (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$, sugerencia: $|\dfrac{x}{x^2+1}| \leq |x|$.

Cálculo de límites

10. Calcula los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+3)^2} - \dfrac{1}{9}}{x}$

   (b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-4}-1}{5-x}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

   (d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x}}$

   (e) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{12-x}}{2-\sqrt{x+1}}$

   (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x+1}}{x-2}$