CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 1
Otoño 2023
La integral de Riemann. Propiedades de la integral definida

1. Escribe la integral de Riemann $\int_0^1 (1+x)^2\,dx$ como el límite de sumas de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,(x_k - x_{k-1})$, en donde

$$P = \left\{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\},$$

$c_k = \dfrac{k}{n}$ y $f(x) = (1+x)^2$.

2. Expresa el límite como una integral definida (no calcules la integral):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\left[\left(2+\frac{4(1)}{n}\right)^{1/2} + \left(2+\frac{4(2)}{n}\right)^{1/2} + ... + \left(2+\frac{4(n)}{n}\right)^{1/2}\right].$$

3. Evalúa la integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ como el límite de una suma de Riemann. Sugerencia: usa la partición de $[0,1]$ en donde

$$x_k = c_k = \frac{k^2}{n^2}$$

y, correspondientemente,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

4. En cada inciso argumenta si en el intervalo dado la función es: (i) continua, (ii) acotada, (iii) integrable:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \\ 5, & x = 0 \\ -2, & x \in (0,1] \end{cases}$ en $[-1,1]$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ en $[-10\pi, 10\pi]$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $[0,1]$.

5. Calcula $\int_{-2}^{2} (2x+1+|2x+1|)\ dx$.

6. Determina $\int_{-2}^{a} |x|\ dx$. Analiza los casos $a \leq 0$ y $a > 0$.

7. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que

$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq \frac{1}{7}.$$

8. A partir de las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$

obtén cotas superior e inferior para $\int_0^1 \cos \sqrt{x}\, dx$.

9. Sin efectuar la integral, demuestra que

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^4 x\, dx \geq \frac{\pi}{8}$.

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{5-x}\ dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1}\ dx$.

10. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.