

## Cálculo Diferencial e Integral III. Otoño 2023

### Laboratorio 3: Derivadas parciales, diferenciación, planos tangentes

- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ . Sea  $z = T(x, y)$  la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(-1, 2, -7)$ .
  - Encuentra la ecuación del plano en  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el punto  $(1, -1, 3)$  y que es paralelo al plano  $z = T(x, y)$ .
  - Encuentra un vector no nulo que sea ortogonal al plano  $z = T(x, y)$ .
- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, -2 + h) - f(1, -2)}{h} = 4$ . Supón que  $a$  es una constante tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{|f(x, y) - (f(1, -2) + (a + 1)(x - 1) + (3a - 1)(y + 2))|}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} = 0.$$

Encuentra el valor de las derivadas parciales de  $f$  en el punto  $(1, -2)$ .

- Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $\mathbf{F}(\vec{x}) = A\vec{x}$ . Muestra que la derivada de  $\mathbf{F}$  en  $\vec{x}$ , denotada por  $D\mathbf{F}(\vec{x})$ , es  $A$  para toda  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Nota: La derivada de una función  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $\vec{x}$  también es conocida como *matriz jacobiana* de  $\mathbf{F}$  en  $\vec{x}$ .

- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$ , diferenciable en todo  $\mathbb{R}^2$ . Muestra que si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son constantes, entonces  $f$  es de la forma  $f(x, y) = ax + by + c$ , donde  $a, b, c$  son constantes.
- Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_1^2 + x_2x_3, x_3^3 - x_1x_2)$ . Calcula  $D\mathbf{F}(2, 2, 1)$ .

- Sea  $A$  una matriz de  $n$  por  $n$  con entradas reales cuya entrada  $(i, j)$  es  $a_{ij}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ . Muestra que  $Df(\vec{x}) = ((A + A^T)\vec{x})^T = \vec{x}^T (A + A^T)$ . *Sugerencia:* para calcular la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , observar que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{pp} x_p^2 +$

$$\sum_{i=1, i \neq p}^n a_{ip} x_i x_p + \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{pj} x_p x_j + \sum_{i=1, i \neq p}^n \sum_{j=1, j \neq p}^n a_{ij} x_i x_j.$$