CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 3

Otoño 2023

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Integral por sustitución

1. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(x-\frac{1}{2x}\right)^2 dx.$

   (b) $\displaystyle\int_4^6 f(x)dx$, en donde $f(x)=\begin{cases} 2x, & 4\le x\le 5,\\ 20-2x, & 5<x\le 6.\end{cases}$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec\theta(\tan\theta+\sec\theta)\,d\theta.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{\csc x}.$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^5 x\right)dx.$

2. Determina las siguientes integrales indefinidas usando una sustitución:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\tan x)^5\cos^2 x}.$

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx.$ Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}}=\frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\cos x\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}dx.$

3. Calcula las siguientes integrales usando el método del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{sen}|\pi-2x|\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} x\sqrt{1+3x}\,dx.$

4. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx.$

   (b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx.$

5. Sea f continua en $[a, b]$. Demuestra que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

6. Sea f continua en $[-a, a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

7. Sea f continua en $\mathbb{R}^+$ y sea

$$H(x) = \int_1^x \frac{1}{t} f\left(t+\frac{1}{t}\right)dt.$$

   Demuestra que $H(1/x) = -H(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

8. Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y f continua en $[0, a]$.

   (a) Usa la sustitución $u = a - x$ para demostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx.$$

   (b) Usa la parte (a) para demostrar que

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}.$$

   (¡El valor de la integral no depende de f!)

   (c) Usa la parte (b) para obtener el valor de

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx.$$

9. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2 \int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t)dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.