

Dominio y rango de funciones

1. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{1 + x^2},$$

indicar todos los elementos del dominio a los que les corresponde el elemento del contradominio

$$y = \frac{7}{10}.$$

2. Determina el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 + 18x - 10}{x^2 - 6x + 5}} + 2,$

(b) $h(x) = \frac{1 - x}{x^2 - |x|}.$

3. Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{2}{3 - x},$

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$

4. Determinar el dominio de la función g , donde $g(x) = f(|x - 2| - |x + 2|)$, y el dominio de f es $(-3, 3)$.

Operaciones entre funciones

5. Dadas $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ y $g(x) = \frac{x - 1}{x},$

(a) Encuentre el dominio de f y el dominio de g .

(b) Encuentre el dominio de $f + g, f - g, fg$ y g/f .

(c) Encuentre el dominio de $f \circ g$.

(d) Encuentre la regla de correspondencia de $(f \circ g)(x)$ en su forma simplificada.

6. Sea $f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = x^{1/4}$, escribe la regla de correspondencia de $f(x)$ que está definida de la siguiente forma:

$$f(x) = f_3 \left(\frac{2}{f_1(f_2(x + 1) + 3)} \right).$$

7. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x$, para cada inciso determinar la función g que satisface lo siguiente:

(a) $(2f - 3g)(x) = x^3 + x + 1,$

(b) $(f/g)(x) = -2.$

8. Se definen funciones recursivamente de la siguiente forma: $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Dadas estas funciones,

- (a) mostrar que $p_2(x) = 2x^2 - 1$ y determinar $p_3(x)$,
- (b) ¿cuál es el rango de $p_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ si $-1 \leq x \leq 1$?
- (c) ¿cuáles son las raíces de las funciones mencionadas en el inciso anterior?

Problema composición funciones

9. Sea $f(x)$ una función definida para todo $x \leq 0$ y $1 < x < 5$, determinar el dominio de la composición $(f \circ g)(x)$ donde

$$g(x) = \frac{5}{x^2 - 4}.$$

10. Sean

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - x - 2,$$

determinar la regla de correspondencia de la función $h(x) = f(x - f(g(x)))$.

11. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4 & \text{si } x < 0, \\ 3x^2 + x & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

determinar $(f \circ g)(x)$.