CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Otoño 2023
Teorema del Valor Medio para Integrales. Teorema Fundamental del Cálculo

1. Sean $0 \leq a < b$ y $f(x) = x^2$.

   (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a, b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

   (b) Muestra que existe un número $c \in [a, b]$ tal que $c^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

2. Sea $f(x) = |2x + 1|$, encuentra todos los reales c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para f en $[-1, 0]$.

3. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $\int_a^b [\, f(x) - g(x)]\, dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

4. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

   Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\, dx / \int_a^b g(x)\, dx$ y luego utiliza el TVI.

5. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

   (a) $G(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt.$

   (b) $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^4}\, dt.$

   (c) $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + s^4}\, ds\right)^2.$

   (d) $G(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1 + t^4}\, dt.$

   (e) $G(x) = \displaystyle\int_0^x x^2\sqrt{1 + t^4}\, dt.$

   (f) $G(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{2x} \sqrt{1 + t^4}\, dt.$

   (g) $G(t) = \displaystyle\int_{t^2}^{t^4} \frac{t^2}{1 + \sqrt{x}}\, dx.$

6. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_{\pi/2}^{x} \frac{x \operatorname{sen} t}{t}\, dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2\, f(t) dt.$$

Muestra que $f'''(x) = 2f(x)$.

8. Determina una función continua $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y una constante $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt + 20 = 5x^{1/2}.$$

9. Calcula $f(2)$, si f es continua y tal que

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x), \quad x \geq 0.$$

10. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

11. Sea f continua en $[a, b]$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^x f(t)\, dt = \int_x^b f(t)\, dt.$$

Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_x^b f(t)\, dt$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^{x} f(t)\ dt.$$

(a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Justifica que g es diferenciable en $\mathbb{R}$ y entonces calcula $g'(x)$.