

ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final, diciembre de 2022
Álgebra Superior 2/Matemáticas Discretas

El examen consiste de 9 preguntas. De estas preguntas, debes escoger únicamente 7 para responder, pero debes escoger al menos una pregunta de cada uno de los grupos (es decir, al menos una del grupo 1, al menos una del grupo 2, al menos una del grupo 3 y al menos una del grupo 4).

1. a) Simplifica la siguiente expresión hasta dejarla en la forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$2i(i - 1) + \left(\sqrt{3} + i\right)^3 + (1 + i)(\overline{1 + i}).$$

- b) Encuentra y grafica las raíces cúbicas del número complejo $-27 + 27i$.

2. a) Considera el polinomio

$$f(x) = 2x^4 - 14x^3 + 33x^2 - 26x + 10.$$

Encuentra la factorización en polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$, respectivamente, si sabes que una raíz es el número complejo $3 + i$. Explica por qué los polinomios que encontraste son irreducibles.

- b) Usando el algoritmo de Euclides encuentra el máximo común divisor (mónico) de los polinomios $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ dados por

$$f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 9x - 5 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1.$$

3. a) Encuentra cuántos números naturales hay entre 1 y 300 (ambos incluidos) que sean impares o cuadrados perfectos, pero no ambos.
- b) Determina de cuántas maneras diferentes se pueden reacomodar las letras de la palabra DISCRETA de tal manera que no aparezcan las tres vocales juntas. Por ejemplo, se permite el reacomodo CDIESRTA pero no el reacomodo TDIAERSC.
- c) Sea A el conjunto $A = \{1001, 1002, 1003, \dots, 2021, 2022\}$. Demuestra que cualquier subconjunto de A con 512 elementos tiene dos elementos cuya suma es 3023
4. a) En la compañía Líneas Aéreas Aeropatito se tiene un mapa de rutas de avión, en la cual aparecen 25 rutas. Sabiendo que las rutas solo se cruzan en las ciudades conectadas y que de cada ciudad parten al menos cuatro rutas, ¿a lo más cuántas ciudades aparecen en el mapa?
- b) Si una gráfica (simple) tiene 2022 vértices, ¿cuál es el número máximo de aristas que puede tener?