

ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final (parte escrita), mayo de 2023
Álgebra Superior 1/Pensamiento Matemático

1. Utiliza el principio de inducción matemática, en cualquiera de sus versiones, para demostrar que para $n \geq 4$ se tiene

$$2^n < n!.$$

2. Demuestra que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son tales que $g \circ f : A \rightarrow C$ es suprayectiva y $g : B \rightarrow C$ es inyectiva, entonces $f : A \rightarrow B$ es suprayectiva.

3. Sean a, b y c enteros. Pruebe que si $(a, b) = 1$ y $c \mid a + b$, entonces $(a, c) = 1$.

4. Considera las siguientes ecuaciones diofantinas:

$$66x + 81y = 400 \quad \text{y} \quad 66x + 81y = 402.$$

Determina cuál de las dos ecuaciones tiene soluciones enteras y justifica tu respuesta. Además encuentra una solución de la ecuación que sí tenga soluciones.

5. Sean D y E conjuntos. Demuestra que $D \triangle E \subseteq D$ si y solo si $E \subseteq D$.