

ITAM, Departamento Académico de Matemáticas
Examen final (parte escrita), diciembre de 2022
Álgebra Superior 1/Pensamiento Matemático

1. Demuestra, usando inducción matemática, que para todo entero positivo n se cumple que

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2.$$

2. Sean A y B conjuntos. Demuestra que si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$.

3. Decide si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Si es verdadero, demuéstalo. Si es falso, da un contraejemplo.

- Sean a, b y c enteros distintos de cero. Si $a|3b - 2c$ y $a|c$ entonces $a|3b$.
- Sean a y b enteros distintos de cero. Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b$.

4. Si aplicamos el algoritmo de Euclides a los enteros 14628 y 4860 se obtienen las siguientes igualdades:

$$14628 = (4860)(3) + 48,$$

$$4860 = (48)(101) + 12,$$

$$48 = (12)(4).$$

Usando esta información:

- a) Encuentra el máximo común divisor de 14628 y 4860.
- b) Escribe el máximo común divisor encontrado en el inciso anterior como combinación lineal de 14628 y 4860.
- c) Determina si la ecuación

$$14628x + 4860y = 60$$

tiene soluciones enteras y de ser así, encuentra al menos una solución.