

**Segundo Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.  
Primavera 2023**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CU: \_\_\_\_\_

- i) No se permite el uso de calculadoras.
- ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).

**Examen Tipo A. Duración: 2 horas**

1. Sea  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $r(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ . Demuestra que

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) (\vec{x}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}.$$

2. Determina para que valores de  $a \in \mathbb{R}$ , la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

3. Sean  $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ , y  $\vec{z}_3$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Define la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{z}_1\|^2 + \|\vec{x} - \vec{z}_2\|^2 + \|\vec{x} - \vec{z}_3\|^2.$$

Demuestra que  $f$  tiene un mínimo local en el punto  $\vec{a} = \frac{\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3}{3}$ .

4. Sea  $f(x, y) = axy^2 + byx^2$ , con  $a$  y  $b$  constantes. Determina los valores de  $a$  y  $b$  tales que la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P = (1, 2)$  en la dirección de los vectores  $\vec{v} = (1, 0)$ ,  $\vec{w} = (0, -2)$  sea 4 y 2 respectivamente.
5. Encuentra los puntos críticos de  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$  y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.
6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Sea  $w = f(x, y)$  y sean  $x = u^2 - 2v$ ,  $y = uv$ . Si  $\nabla f(7, 3) = (-2, 3)$  y  $H_f(7, 3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ , encuentra el valor de  $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}$  cuando  $u = 3$  y  $v = 1$ .
7. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = y^3 - xy + z^2$ . Sea  $S$  la superficie de nivel de  $f$  que contiene al punto  $(1, -2, -1)$ . Encuentra la ecuación del plano tangente a  $S$  en dicho punto.