

**Segundo Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.
Primavera 2023**

NOMBRE: _____ CU: _____

- i) No se permite el uso de calculadoras.
- ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).

Examen Tipo A. Duración: 2 horas

1. Sea $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$. Demuestra que

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) (\vec{x}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x}.$$

2. Determina para que valores de $a \in \mathbb{R}$, la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

3. Sean \vec{z}_1, \vec{z}_2 , y \vec{z}_3 puntos en \mathbb{R}^2 . Define la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{z}_1\|^2 + \|\vec{x} - \vec{z}_2\|^2 + \|\vec{x} - \vec{z}_3\|^2.$$

Demuestra que f tiene un mínimo local en el punto $\vec{a} = \frac{\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3}{3}$.

4. Sea $f(x, y) = axy^2 + byx^2$, con a y b constantes. Determina los valores de a y b tales que la derivada direccional de f en el punto $P = (1, 2)$ en la dirección de los vectores $\vec{v} = (1, 0)$, $\vec{w} = (0, -2)$ sea 4 y 2 respectivamente.
5. Encuentra los puntos críticos de $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales o puntos silla.
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Sea $w = f(x, y)$ y sean $x = u^2 - 2v$, $y = uv$. Si $\nabla f(7, 3) = (-2, 3)$ y $H_f(7, 3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, encuentra el valor de $\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}$ cuando $u = 3$ y $v = 1$.
7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = y^3 - xy + z^2$. Sea S la superficie de nivel de f que contiene al punto $(1, -2, -1)$. Encuentra la ecuación del plano tangente a S en dicho punto.