**Primer Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.**
**Primavera 2023**

NOMBRE:______________________________________________ CU:________

**i) No se permite el uso de calculadoras.**
**ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).**

**Examen Tipo A. Duración: 2 horas**

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (e^{x^2+y^2-1} - 1)(y - 2x)$. Determina y dibuja el conjunto de nivel de $f$ asociado al nivel 0.

2. El plano con ecuación $z = 9x - 27y$ es tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3x^2y$. Determina los puntos de tangencia.

3. Si $z = x^3 - 3x^2y$, $x = u^2 - e^{3u-v}$, y $y = v^2 - u^2$, determina $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en el punto $(u, v) = (1, 3)$ usando la regla de la cadena (no obtendrás puntos si usas otro método).

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $f(0, 0) = 0$. Demuestra que $f$ no es continua en $(0, 0)$.

5. Sea $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{G}(x, y) = (x^2 - y, 2xy, 1 - x + y)$. Sea $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable tal que $\mathbf{F}(1, -1, 2, -2) = (2, -1)$. Supón que

$$\mathrm{D}\mathbf{F}(1, -1, 2, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Encuentra $\mathrm{D}(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(1, -1, 2, -2)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + .... + nx_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx_k^2$.

   Demuestra que $\nabla f(1, 1, 1, ..., 1) \bullet (1/2, 1/2, 1/2, ...., 1/2) = \dfrac{n(n + 1)}{2}$, donde $\bullet$ denota el producto punto de 2 vectores.
   *Sugerencia*: $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

7. Una partícula se mueve en el espacio $xyz$ de tal manera que su posición al tiempo $t \in [0, 1]$ está dada por $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t, t^2 + 1, t + 4)$. Al tiempo $t = 1$, la partícula comienza a moverse en línea recta a velocidad constante e igual a $\mathbf{r}$'$(1)$. Encuentra la posición de la partícula al tiempo $t = 3$.