CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 14
Primavera 2023
Sucesiones de números reales. Series numéricas. Criterios de convergencia

Nota: Sólo se incluirán los temas que se hayan cubierto en clase.

1. Calcula el límite de cada sucesión $\{a_n\}$ o justifica si ésta diverge:

   (a) $a_n = \dfrac{\tan^{-1}\left(n^2\right)}{\ln(1+n)}$.

   (b) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$.

   (c) $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   (d) $a_n = n - \ln(3e^n + 1)$.

   (e) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   (f) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$.

   (g) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

   (h) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

   (i) $a_n = (\ln n)^{1/n}$. Sugerencia: $1 \leq \ln n \leq n$, para $n \geq 3$.

2. Demuestra que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\alpha^n)^{1/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0<\alpha\leq 1, \\ \alpha & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b), \quad a, b > 0.$

3. Considera la sucesión $I_n = \displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{1+nx}\right) dx$.

   (a) Demuestra, justificando con detalle, que

   $$I_n = n\ln\left(\frac{1+n}{n}\right).$$

   (b) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

4. En cada inciso, encuentra el valor de la serie o justifica si ésta diverge:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{2n-1}}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{n+2}}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_0 e^{-nbt_0}\,, \quad c_0, b, t_0 > 0.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} + 3^{n+1}}{6^n}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right).$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\,(2n+3)}.$ Sugerencia: utiliza fracciones parciales.

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$ Sugerencia: utiliza fracciones parciales.

5. Analiza si las siguientes series convergen o divergen. En cada caso especifica qué criterio usas y verifica que éste sea aplicable:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^{1/n}.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3!\; n!\; 3^n}.$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n}{n!}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}.$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}.$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}.$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

6. Analiza si la serie converge absolutamente, condicionalmente o diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$.