Examen Final Departamental. Cálculo Diferencial e Integral III.
Primavera 2023

NOMBRE :____ CU :________

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/9 cada una).
Duración: 2 horas 45 minutos

1. Encuentra la aproximación cuadrática de la función $f(x,y)=e^{x+y^2}$ centrada en el origen $(0,0)$.

2. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0,0)$, $(3,-1)$, $(-1,4)$, y $(2,3)$. Haz un cambio de variables para escribir la integral $\iint_D (|x-y|-2x)\,dxdy$ como una integral doble tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. (**No es necesario calcular dicha integral**)

3. Encuentra el valor de
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dy\right)dx.$$
Sugerencia: Dibuja la región de integración y considera un cambio de variables. Una antiderivada de $\ln(x)$ es $x\ln(x)-x$.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua. Escribe la integral iterada
$$\int_{-2}^{2}\left(\int_{0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx,$$
como una integral de la forma
$$\int_{c}^{d}\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$
Es decir, escribe las funciones ψ_1 y ψ_2 y el valor de las constantes c, d.

5. Sea D el sólido en el espacio xyz acotado por las superficies $y=x+4$, $y=x^2+x$, $z=0$, y $z=e^{xy}+x^2+y^2$. Encuentra una integral doble (o triple) iterada cuyo valor sea el volumen de D. **Nota**: no intentes calcular el valor de dicha integral. Debes especificar cada elemento de la integral.

6. Sea $a\in\mathbb{R}$ con $a\in(0,1)$. Sea $D_a=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\right\}$. Encuentra el valor de a tal que $\iiint_{D_a} \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}dxdydz=10$.

7. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $g(0)=1$, $g'(0)=2$. Considera el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} z+g(x^2-y+z) &= 1 \qquad (1)\\ g(x)+yg(z)-1 &= 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Notar que $(0,0,0)$ es una solución del sistema. Demuestra que el sistema anterior define de manera implícita funciones de clase C^1, $z = f_1(y)$, $x = f_2(y)$, para todo y en algún abierto que contiene a 0, y tales que $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$.

8. Escribe el sistema de ecuaciones (en forma desarrollada) que se obtiene al aplicar los multiplicadores de Lagrange al problema de calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ con las restricciones $2x+y+z = 1$, $x-2y+3z = -4$ (esta parte vale el 70 %). Encuentra los extremos (esta parte vale el 30 %).

9. Una fábrica de procesamiento de maíz requiere construir una esturctura metálica formada por un cilindro en la base y un cono circular recto en la parte superior. La parte cónica debe tener una altura de 3 metros, como se muestra en la figura. El costo del material en la parte cilíndrica es de 50 pesos por m^2, mientras que en la parte cónica el costo es de 80 pesos por m^2. Se desea encontrar el radio r y altura h del cilindro tales que el volumen contenido por la estructura sea máximo sabiendo que la inversión total en los materiales será de 20000 pesos (no tomar en cuenta la base del cilindro ni la base del cono en los materiales). **Plantea el problema a maximizar junto con las restricciones apropiadas**. **No es necesario que apliques el método de los multiplicadores de Lagrange**.

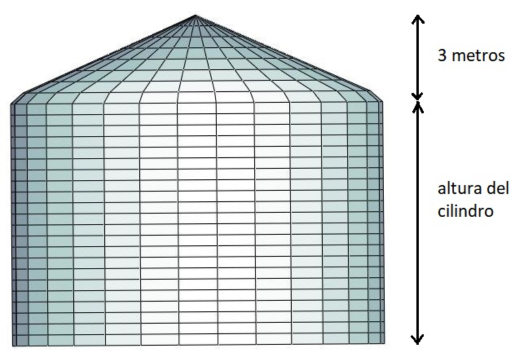

Figura 1: Estructura con base cilíndrica y tapa cónica.

Nota: El volumen de un cono circular recto con radio de la base r y altura h, está dado por $\frac{\pi r^2 h}{3}$; el área de la superficie de dicho cono es $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. El volumen de un cilindro con radio de la base r y altura h, está dado por $\pi r^2 h$; el área de la superficie de dicho cilindro es $2\pi r h$.