

Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Tercer Examen Departamental
Jueves 27 de Abril del 2023

Nombre: _____

cu: _____

1	2	3a	3b	4	5	6
---	---	----	----	---	---	---

.....
JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Tiempo: 2:00 horas
.....

1. (1.25 puntos) Mostrar que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$, donde a y b son parámetros reales diferentes de cero, siempre tiene un máximo y un mínimo local.

2. (1.5 puntos) Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El tren que parte primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 2 km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 3 km/h. ¿A qué razón cambia la distancia entre los trenes 2 horas después de que partió el segundo tren?

3. a) (0.5 puntos) Enuncia el teorema de Rolle.

b) (1.0 punto) Supongamos que $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , mostrar que si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$ entonces existe al menos un punto entre a y b donde las rectas tangentes a las gráficas de f y g son paralelas.

4. (1.25 puntos) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y dos veces diferenciable en (a, b) . Supón que f tiene tres raíces diferentes en $[a, b]$. Muestra que f' tiene al menos dos raíces en (a, b) y que f'' tiene al menos una raíz en (a, b) .

5. (1.5 puntos) Considera la función $f : [\frac{1}{4}, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^{3/2} - 3x^2$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente mínima.

6. (3 puntos) Dibuja la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1},$$

considerando los siguientes puntos:

- dominio,
- paridad de la función,
- intersección con los ejes,
- puntos críticos e intervalos de monotonía,
- máximos y/o mínimos locales,
- intervalos de concavidad,
- asíntotas,
- descripción de la gráfica utilizando la información anterior.