

Cálculo Diferencial e Integral I
Departamento de Matemáticas, ITAM
Segundo Examen Departamental
Martes 28 de Marzo del 2023

Nombre: _____

cu: _____

1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	5	6	7
----	----	---	----	----	----	----	---	---	---

.....
JUSTIFICA CON DETALLE TUS RESPUESTAS
LEE CON CUIDADO LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS
NO se permiten libros, apuntes, calculadoras, celulares o tabletas
Tiempo: 2:00 horas
.....

1. a) (0.5 puntos) Escribe la definición formal del límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

b) (1 punto) Demuestra usando la definición del inciso anterior que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2 + 5} = 0.$$

2. (1.5 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0, \\ a + x^3 & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{b}{2x} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

determinar los valores de a y b de tal forma que f sea continua en todo \mathbb{R} .

3. a) (0.5 puntos) Enuncie el Teorema de Bolzano.

b) (1.25 puntos) Pruebe que existen por lo menos dos soluciones reales de la siguiente ecuación:

$$\cos^2(x) - 3x^2 = -\operatorname{sen}(x).$$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado, no hay crédito parcial):

a) (1 punto)

$$f(x) = \sqrt{(1 - 2x)^2 + \sqrt{2x - 1}}$$

b) (1 punto)

$$g(x) = \tan\left(\frac{\cos(x)}{1 + x^2}\right)$$

5. (1.25 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la expresión

$$x^3 - y^2 + \sqrt{xy} = 1$$

en el punto $(1, 1)$.

6. (1 punto) Para $y = \frac{1}{x}$, calcula $\frac{dy}{dx}$ en $x = 3$ usando la definición de derivada.

7. (1 punto) Si f es una función diferenciable tal que $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$, calcula el valor de la derivada de la función $g(x) = (x^5 + f(x))^{-2}$ en el punto $x = 1$.