

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 13

Primavera 2023

Aproximación polinomial y teorema de Taylor. Residuo y estimación del error de aproximación

1. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado  $n$  generado por  $f(x)$  en  $x_0$ :

(a)  $f(x) = \ln(x)$ ,  $x_0 = 1$ .

(b)  $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ ,  $x_0 = 0$ .

(c)  $f(x) = x^2 - x - 2$ ,  $x_0 = -1$ .

2. En cada inciso, obtén el polinomio de Taylor de grado 2 generado por  $f(x)$  en  $x_0$ :

(a)  $f(x) = 3 + \int_2^{2x} e^{t^2-4} dt$ ,  $x_0 = 1$ .

(b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ ,  $x_0 = 0$ .

3. A partir del polinomio de Taylor de grado  $n$  para  $e^x$  en  $x_0 = 0$  determina el polinomio de Taylor de grado 3 generado por las siguientes funciones  $f(x)$  en  $x_0 = 0$ :

(a)  $f(x) = e^{-2x}$ .

(b)  $f(x) = e^{-x^2}$ .

(c)  $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ .

4. Obtén el polinomio de Taylor de grado 3 generado por  $f(x) = \tan^{-1}(x)$  en  $x_0 = 0$ , y úsalo para aproximar el valor de  $\pi/4$ .

5. (a) Demuestra que si  $|x|$  es pequeño y  $0 < \alpha \leq 1$ , entonces

$$(x+1)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

- (b) Usa esta aproximación para estimar  $\sqrt{1.4}$ .

6. (a) Determina el polinomio de Taylor de orden 3,  $P_3(x)$ , generado por  $f(x) = \frac{2}{x}$  en  $x_0 = 2$ .
- (b) Estima el error cometido al utilizar  $P_3$  para aproximar el valor de  $\frac{2}{2.2}$ .

7. Aproxima el valor de  $e^{1/2}$  con un error menor que 0.001.
8. Determina la exactitud de la aproximación

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

sobre el intervalo  $[-1, 1]$ .

9. Usando el teorema de Taylor, demuestra que

$$\left| e^{-x} - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^5(\mathbb{R})$  con polinomio de Taylor de grado 5 en  $x_0 = 1$  dado por

$$P_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right).$$

Determina  $f^{(k)}(1)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ , e indica si  $f$  tiene o no un extremo local en el punto 1.

11. Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función con segunda derivada continua en  $\mathbb{R}^+$ , tal que  $f'(1) = 0$  y  $f''(1) = -2$ . Sea  $\phi(x) = f(e^x)$ .
- (a) Calcula  $\phi'(0)$  y  $\phi''(0)$ . ¿Podrá garantizarse que  $\phi$  admite un extremo local en  $x = 0$ ? ¿Máximo o mínimo?
- (b) Escribe la fórmula de Taylor para la función  $\phi$  en  $x_0 = 0$  con residuo de orden 1, y utilízala para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2}.$$

12. Sea  $I \in \mathbb{R}$  un intervalo abierto y sea  $f \in C^3(I)$ . Usa la fórmula de Taylor para demostrar que, para cualquier  $a \in I$ ,

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$