

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 12

Primavera 2023

Integrales impropias

1. Calcula la integral impropia de primera especie, o muestra que diverge:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+5x)}.$$

$$(b) \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-2x}} dx.$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx.$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} dx.$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x-2|} dx.$$

$$(g) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+9} dx.$$

2. Calcula la integral impropia de segunda especie, o muestra que diverge:

$$(a) \int_0^1 x \ln(x) dx.$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}.$$

$$(c) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1} dx.$$

$$(d) \int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1-r^4}} dr.$$

$$(e) \int_1^{\cosh(t)} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad t \geq 0.$$

$$(f) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}.$$

$$(g) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}, \quad a < b \text{ dados.}$$

3. Calcula la integral impropia de tercera especie, o muestra que diverge:

- (a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
- (b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.
- (c) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx$.

4. Determina para qué valores de p converge la integral en cada inciso:

- (a) $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.
- (b) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

5. (a) Demuestra que

$$\int \frac{1}{2e^x - e^{2x}} dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4} \ln |2 - e^x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando el inciso anterior, calcula

$$\int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{2e^x - e^{2x}} dx.$$

6. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}$.

- (a) Determina el dominio D de f y justifica que $\int_2^4 f(x) dx$ es una integral impropia.
- (b) Demuestra que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx = 1.$$