

Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2023

Laboratorio 13: Cambio de variables en integrales dobles

1. Sea D la región en el plano xy encerrada por el paralelogramo con vértices $(0, 0)$, $(2, -1)$, $(3, 4)$ y $(5, 3)$. Encuentra el valor de $\iint_D (-x + 3y) dx dy$ haciendo un cambio de variables tal que el dominio de integración sea el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
2. Sea $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{T}(u, v) = (u^2 - 3v, uv + 2v^2)$. Suponer que D_1 y D_2 son dos regiones planas acotadas tales que $D_1 = \mathbf{T}(D_2)$ con \mathbf{T} inyectiva en D_2 . Reescribe $\iint_{D_1} ye^{x^2} dx dy$ como una integral de la forma $\iint_{D_2} g(u, v) du dv$, indicando explícitamente $g(u, v)$. Suponer que las regiones D_1 y D_2 son tales que ambas integrales están bien definidas.

3. Encuentra el valor de $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$, donde

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0, x \leq y\}.$$

4. Sea D la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Demuestra que en coordenadas polares, D se puede escribir como

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta < \pi/2, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} \right\}.$$

5. Si D es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el plano xy , demuestra que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(1)) \leq \iint_D \frac{\sin(x)}{1 + (xy)^4} dx dy \leq 1.$$

6. Sea T_a la región en el plano xy encerrada por un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(0, a)$ con $a > 0$. Sea $D_a = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Encuentra el valor de

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\iint_{T_a} (x+1)^3 (2y+3)^2 dx dy}{\iint_{D_a} e^{x^2-y+1} dx dy}.$$

7. Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.