

# Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2023

## Laboratorio 11 : Teoremas de la Función Implícita e Inversa

1. El punto  $(x_0, y_0, z_0) = (-2, -1, 2)$  satisface la ecuación  $x^2 - xy + z^2y^2 - 6 = 0$ .
  - (a) Usa el teorema de la función implícita para mostrar que la variable  $x$  puede ser escrita de manera única en términos de las variables  $y, z$  para  $(y, z)$  en alguna vecindad de  $(-1, 2)$ ,  $x$  en algún intervalo abierto que contiene a  $-2$ .
  - (b) Encuentra una representación explícita para  $x$  en términos de  $y, z$  de la forma  $x = g(y, z)$  con  $g$  de clase  $C^1$  en algún abierto que contiene a  $(-1, 2)$  y tal que  $-2 = g(-1, 2)$ .

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y tal que  $f(1) = 2$ . Dado el sistema de ecuaciones

$$f(x - 2z) + yz - 4 = 0 \quad (1)$$

$$yf(z) + x - 7 = 0, \quad (2)$$

encuentra condiciones en  $f'(1)$  para que el sistema se pueda resolver (no de forma explícita necesariamente) de manera única para  $x$  y para  $z$  en términos de  $y$  con  $y$  en algún intervalo abierto que contiene a 2,  $x$  en algún abierto que contiene a 3,  $z$  en algún abierto que contiene a 1.

3. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ .
  - (a) Muestra que  $\mathbf{F}$  es localmente invertible alrededor de cualquier punto en  $\mathbb{R}^2$ , pero no es invertible en todo  $\mathbb{R}^2$ .
  - (b) Notar que  $\mathbf{F}(0, \pi/4) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  y que existen abiertos  $U, V$  que contienen a  $(0, \pi/4)$  y a  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  respectivamente tales  $\mathbf{F} : U \rightarrow V$  es invertible. Si  $\mathbf{G}$  es la inversa de dicha función, calcula  $D\mathbf{G}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  sin calcular explícitamente la función  $\mathbf{G}$ .
4. Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - xy, y + xy)$ . Dibuja en el plano  $xy$  el conjunto de puntos  $(x_0, y_0)$  para los cuales el teorema de la función inversa garantiza que  $\mathbf{F}$  es inyectiva en algún abierto que contiene a  $(x_0, y_0)$ .
5. Dado el sistema de ecuaciones

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \quad (3)$$

$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2, \quad (4)$$

- (a) Muestra que este sistema define de manera implícita funciones de clase  $C^1$   $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ , para todo  $(x, y, z)$  en algún abierto que contiene a  $(1, 1, 1)$ , con  $1 = u(1, 1, 1)$  y  $1 = v(1, 1, 1)$ .
- (b) Encuentra el valor de  $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1)$ .

6. El punto  $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 2)$  está en las superficies  $S_1$  y  $S_2$  en el espacio  $xyz$  descritas por  $x^2(y^2 + z^2) = 5$ ,  $(x - z)^2 + y^2 = 2$  respectivamente. Muestra que cerca de dicho punto, la curva formada por la intersección de  $S_1$  con  $S_2$  puede ser descrita por un par de ecuaciones de la forma  $z = f(x)$ ,  $y = g(x)$  con  $f$  y  $g$  de clase  $C_1$ .
7. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y tal que  $f(0, 0) = 0$ . Encuentra condiciones sobre  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  que permitan resolver de manera única la ecuación  $f(f(x, y), y) = 0$  para la variable  $y$  como función de  $x$ , con  $x$  en una vecindad de 0, y  $y$  en una vecindad de 0.