Tasas relacionadas

1. Un primer corredor se dirige al sur a una velocidad constante de 12km/h. El corredor llega a un punto P y treinta minutos después un segundo corredor, desde el mismo punto P, se dirige al este a una velocidad de 10km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los corredores 60 minutos después de que el segundo corredor parte del punto P?

2. Una escalera con longitud de 12m está inclinada sobre una pared. La escalera se desliza manteniendo un punto de contacto con la pared (punto superior) y un punto de contacto con el piso (punto inferior). Si la parte superior de la escalera se desliza sobre la pared a una rapidez de 2m/s, determinar qué tan rápido se aleja la parte inferior de la escalera cuando esta se encuentra a 5m de la pared.

3. Un globo esférico se infla con aire a razón constante de 25cm^3/min. Determinar la tasa de cambio del radio del globo cambia cuando su diámetro es de 5cm.

4. Una partícula se desplaza, en el plano xy, a lo largo de la curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, aumentando en el valor de x y disminuyendo en el valor de y. En el momento que la partícula alcanza el punto $(4, 1/2)$, la coordenada x aumenta a una rapidez de 5cm/s ¿Qué tan rápido cambia la coordenada y de la partícula en ese instante de tiempo?

5. Un papalote que está a 10m del piso se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 2m/s. ¿Con qué velocidad disminuye el ángulo entre la cuerda y el piso cuando se han soltado 50m de cuerda?

6. Una persona cuya estatura es de 2m se aleja, a una velocidad constante de 1m/s, de una lámpara que está colocada en un poste, a una altura de 5m. ¿A qué velocidad se aleja la sombra de la persona (la punta) del poste cuando la persona está alejada 7m del poste?

Teorema Rolle y Teorema Valor Medio

7. Muestra que la función $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$ tiene exactamente una raíz real.

8. Usa el teorema de Rolle para probar que si cualquier polinomio de tercer grado tiene a lo más tres raíces reales entonces todo polinomio de cuarto grado tiene a lo más cuatro raíces reales.

9. Considera una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que es continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$ y satisface $-2 \leq f'(x) \leq 4$, $\forall x \in (0, 1)$. Muestra que $-2x + f(0) \leq f(x) \leq 4x + f(0)$, $\forall x \in [0, 1]$.

10. Sea $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, determina el número c que satisfaga el TVM para $f(x)$ en el intervalo $[1, 3]$.

11. Muestra que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), con $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$, es inyectiva (si $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$).

12. Considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$, diferenciable en $(0, 1)$, que satisface $f(0) = 1$ y $f'(x) \geq 3$ $\forall x \in (0, 1)$. Utiliza el TVM y el TVI para mostrar que existe un único $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 7/2$.

Valores Extremos y Funciones Monótonas

13. Determina las coordenadas de todos los puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, de las siguientes funciones. Identificar si los puntos críticos corresponden o no a extremos locales.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{|x+4|+|x|}$

    (b) $g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 2$

    (c) $h(x) = x^2 + |2x+2|$

    (d) $p(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

    (e) $q(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

    (f) $r(x) = |x - x^2|$

    (g) $s(x) = x^{1/3} - x$

14. ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros reales a, b, c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sea estríctamente creciente?

15. Mostrar que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$, donde a y b son parámetros reales diferentes de cero, siempre tiene un máximo y un mínimo local.