

Optimización funciones en intervalos cerrados

1. Determina los extremos globales de las siguientes funciones:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - 3(x - 3)^2, & \text{si } 2 < x \leq 5. \end{cases}$$

(b)

$$g(x) = |3 - x^2|, \quad x \in [-1, \sqrt{6}]$$

(c)

$$h(x) = x^{2/3}(x - 4), \quad x \in [-\frac{1}{2}, 3]$$

Problemas de optimización

- Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm gira alrededor de su altura generando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?
- Una página debe contener 30 cm² de texto impreso. Se requiere que los márgenes superior e inferior sean de 2cm y los laterales de 1cm. Determinar las dimensiones de la página que permitan ahorrar más papel.
- Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice la menor cantidad posible de metal?
- Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.
- Obtener las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.
- Obtener las dimensiones que hacen mínimo el costo de un contenedor cerrado que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m³, su altura 1 m y el costo de construcción por m² es de \$500 pesos para la base, \$60 pesos para la tapa y \$40 pesos para cada pared lateral.

Concavidad/Convexidad, Puntos de Inflexión

8. ¿Para cuál de los valores de $b = 2, 3, -2, -3$ la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$?
9. Supón que f y g son funciones dos veces diferenciables en un intervalo I , prueba que:
 - (a) si f es positiva y convexa en el intervalo I entonces $g(x) = f^2(x)$ es convexa en I .
 - (b) si f y g son positivas, crecientes y convexas en I entonces su producto, fg , es una función convexa en I .
10. Responde las siguientes preguntas sobre puntos de inflexión:
 - (a) Da un ejemplo de una función f tal que $f''(c) = 0$ pero $x = c$ no sea un punto de inflexión.
 - (b) ¿Es $c = 0$ punto de inflexión de $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)?
 - (c) Muestra que $g(x) = x|x|$ tiene un punto de inflexión en $c = 0$ y que $f''(c)$ no existe.
11. Para la función $f(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$ realiza lo que se indica en los siguientes incisos:
 - (a) Calcula los puntos críticos.
 - (b) Determina intervalos de concavidad/convexidad y puntos de inflexión.
 - (c) Utiliza el criterio de segunda derivada para determinar extremos locales.
 - (d) ¿La función f tiene algún extremo que no se obtiene utilizando criterio de segunda derivada?
 - (e) Esboza la gráfica de la función.

Asíntotas

12. Determina las asíntotas horizontales de

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Utiliza esta información, junto con concavidad e intervalos de crecimiento/decrecimiento, para esbozar la gráfica de la función.

13. Realizar la gráfica de las siguientes funciones indicando dominio, puntos críticos, intervalos de crecimiento/decrecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad/convexidad, asíntotas e intersecciones con los ejes.
 - (a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 - (b) $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 1}$
 - (c) $h(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 4}}$