CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 8
Primavera 2023
Funciones trigonométricas inversas

1. Simplifica la expresión $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\right)$.

2. Prueba que

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}(x), \quad \text{si } |x| < 1.$$

   Sugerencia: Deriva ambos lados. Verifica, dibujando el triángulo.

3. Halla el valor exacto de $\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{1}{2} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

4. Halla el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:
   (a) $f(x) = \sec^{-1}(\ln x)$.
   (b) $f(x) = 3\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x^2-1})$.

5. Considera la función definida por

$$f(x) = -\pi + \cos^{-1}(1 - \ln x).$$

   (a) Determina: (i) el dominio de f, (ii) la imagen (rango) de f, (iii) los ceros de f, (iv) las soluciones de la ecuación $f(x) = -\pi$.
   (b) Demuestra que f es inyectiva.
   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

6. Sea

$$f(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt, \quad \text{con } x > 0.$$

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante.
   (b) Resolviendo la integral, demuestra que la constante es $\pi/2$. Sugerencia: $\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(1/x)$.

7. Determina las siguientes integrales:
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-9}}dx$.
   (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

(c) $\displaystyle\int_{-b}^{-b/2} \frac{dx}{\sqrt{-2bx - x^2}}, \quad b > 0.$

8. Encuentra los valores de $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\int_1^a \frac{dx}{x(1 + \ln^2(x))} = \frac{\pi}{3}.$$

9. Determina una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^x - 9}$, efectuando el cambio de variable $t = \sqrt{e^x - 9}$.

10. Determina una primitiva de la función $f(x) = \sec(x)$, efectuando el cambio de variable $t = \operatorname{sen}(x)$. Sugerencia: Efectúa la integral usando la sustitución indicada y luego utiliza la identidad $\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$, $|x| < 1$.

11. (a) Prueba que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh}(x)) + C.$$

Sugerencia: $\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \int \dfrac{1}{\cosh(x)}\, dx = \int \dfrac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}\, dx.$

(b) Prueba también que

$$\int \operatorname{sech}(x)\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh(x)) + C. \quad \text{(Derivar.)}$$