CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 11
Primavera 2023
Integración por partes, integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^a \frac{t}{e^{t/a}}dt, \;\; a > 0.$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}dx.$

   (c) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, dx.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx.$

   (e) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{5x+3}\right)\; dx.$

   (f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}(3x)\, dx.$

   (g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx.$

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\, dx.$

2. Demuestra la siguiente fórmula de reducción de grado:

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Demuestra que $\int_a^b \left(\int_x^b f(t)dt\right) dx = \int_a^b (x-a)\, f(x)dx.$

4. (a) Demuestra que

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy, \quad \text{con } y = f^{-1}(x).$$

   (b) Utilizando el inciso anterior, determina: (i) $\int \cos^{-1}(x)dx$, (ii) $\int \log_2(x)dx$.

5. Encuentra las siguientes integrales trigonométricas:

   (a) $\displaystyle\int \cos^2(\sqrt{y})\, dy.$

   (b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\; dx.$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3(x)\cosh^2(x)\ dx.$

(d) $\displaystyle\int \tan^5(x)\ \sec^4(x)\ dx.$

(e) $\displaystyle\int \tan^3(x)\ \sec^5(x)\ dx.$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\ dx.$

(g) $\displaystyle\int \csc^3(x)\ dx.$

(h) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3(x)\, dx.$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\ dx.$

6. Demuestra que para $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$

7. Usando una sustitución trigonométrica determina las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}(x)\ dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\ dx.$

(c) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t}+9}}.$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}}\, dx.$

8. Usando la sustitución $u = \sec(x)$ demuestra que

$$\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C.$$

9. Utiliza fracciones parciales para determinar las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x^2 - 2x}.$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 3x^2 + 5x + 3}{1 - x^4}\, dx.$

10. Determina

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}. \quad \text{(Usa una sustitución trigonométrica.)}$$

    Ahora obtén

$$\int \frac{2 - x + x^2 - x^3}{(x^2+1)^2} dx.$$

11. Usando el cambio de variable indicado, determina la primitiva de cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad u = \cosh x.$

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)}, \quad u = \cos x.$

12. Usa fracciones parciales para obtener

$$\int \frac{dx}{ax(bx+c)}, \qquad a, b, c > 0.$$

    Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{ax(bx+c)}.$$

13. Determina

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - e^x}. \quad \text{(Cambia variables y usa fracciones parciales.)}$$

    Ahora obtén

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{e^{2x} - e^x}.$$