CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 10
Primavera 2023
Ejercicios de repaso de los laboratorios 1 a 8

1. Determina la derivada que se indica en cada inciso:

   (a) $f'(x)$, si $f(x) = \dfrac{\log_7 5}{(\ln x)^{3\ln x}}$, $x > 1$.

   (b) $f'(1)$, si $f(x) = \left(\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}\right)^x$, $x > 0$.

   (c) $f''(x)$, si $f(x) = \displaystyle\int_1^{x/2} t^{2t\ln(t)} dt$, $x > 0$.

2. Sea $f(x) = 5 + \log_{1/2}(2 + x) - \displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsen} x} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^6 t}\, dt, \;\; x \in [-1, 1]$.

   (a) Justifica que f es estrictamente decreciente en $[-1, 1]$ y por tanto es invertible.

   (b) Si f^{-1} denota la función inversa de f, calcula $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(4)$.

3. Halla <u>todas</u> las funciones diferenciables f que satisfacen la ecuación

$$[f(x)]^2 = \int_0^x \frac{uf(u)}{3 + u^2}\, du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

4. Sea $f(x) = \displaystyle\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$, $x \in (0, \pi/2)$.

   (a) Sin resolver la integral, demuestra que f es constante en su dominio.

   (b) Resuelve la integral y demuestra que $f(x) = \pi/2$.

5. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}\, dt$.

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1-\ln x}}{\sqrt{4 + x^2}} dx$.

   (c) $\displaystyle\int e^t \operatorname{csch}(t)\, dt$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^3}} dx$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}$.

6. Utiliza la sustitución $x = 3\cosh(t)$, $t > 0$, para demostrar que

$$\int \sqrt{x^2-9}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2-9}}{2} - \frac{9}{2}\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$.

   (a) Calcula el valor promedio $\overline{f}$ de f en el intervalo $[-3, 0]$.

   (b) Encuentra los valores de c que satisfacen la conclusión del Teorema del Valor Medio para Integrales aplicado a la función f en $[-3, 0]$.

8. Usando propiedades de la integral definida, demuestra que

$$1 \leq \int_0^1 e^{x-x^2} dx \leq \sqrt[4]{e}.$$

9. Sea $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, e^{t+(1/t)}\, dt.$$

   Mediante un cambio de variable adecuado, demuestra que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

10. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y diferenciable y sea G la función definida por

$$G(x) = \int_0^{x/2} f(4x)f(t)\, dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

   (a) ¿Es G una función par?¿Es G una función impar?.

   (b) Justifica que G es diferenciable y calcula su derivada.

11. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>continua en todo $\mathbb{R}$</u> y definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \ln(x+e), & \text{si } x > 0 \\ e^{-x^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

   en donde α es una constante real.

   (a) Determina $f(0)$ y el valor de α.

   (b) Justifica la siguiente afirmación: "La función f es diferenciable en el punto $x = 0$".

   (c) Justifica que f es invertible y caracteriza su inversa.

   (d) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(2) = 1$ y $g'(2) = 1 + e$. Calcula el valor de $(f \circ g)'(2)$.