Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2023

Laboratorio 9: Criterio de la Segunda Derivada

1. Encuentra los puntos críticos de $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{6} - y^3 + z^2 + xy + 2z$ y clasifícalos como máximos locales, mínimos locales, puntos silla.

2. Determina y clasifica los puntos críticos de f en los siguientes casos:
   a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 4y + \dfrac{3}{2}x^2 - 3xy + \dfrac{3}{2}y^2$, b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

3. Sea $f(x,y) = x^3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Muestra que todos los puntos críticos de f son puntos silla.

4. Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - kxy$, donde k es una constante real no negativa. Clasifica el punto crítico $(0,0)$ de f como máximo local, mínimo local, o punto silla según el valor de $k \geq 0$.

5. En el plano xy están distribuidas m comunidades $C_1, C_2, ..., C_m$. El centro geográfico de la comunidad C_i tiene coordenadas (x_i, y_i). La comunidad C_i tiene N_i habitantes. El número total de habitantes en las m comunidades es de $T = \sum_{i=1}^{m} N_i$ y la proporción de habitantes en la comunidad C_i respecto al total de las m comunidades es $p_i = N_i/T$.

   Se desea construir una central de bomberos en un punto Q que tome en cuenta el cuadrado de las distancias a las m comunidades y también el número de habitantes en las comunidades. Para ello, se sugiere que el punto Q sea tal que $f(Q) = \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$, donde

   $$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} p_i[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2].$$

   (a) Encuentra las coordenadas del punto Q.

   (b) Muestra que cuando todas las comunidades tienen el mismo número de habitantes, el punto Q es el promedio de los centros geográficos de las comunidades.

   (c) Muestra que para el caso de 2 comunidades, el punto Q está sobre el segmento de recta que une (x_1, y_1) con (x_2, y_2).

6. En el espacio xyz, ¿cuáles son las coordenadas del punto sobre el plano $2x + y + 3z = 3$ que es más cercano al origen?

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se desea encontrar una línea recta $y = mx + c$ que mejor ajuste a $y = f(x)$ en el sentido siguiente: la integral $\int_a^b (f(x) - (mx+c))^2 dx$ debe tomar el valor más chico posible al variar m y c en $\mathbb{R}$.

(a) Encuentra una fórmula para los valores de m y c donde se alcanza dicho mínimo.

(b) Para el caso $[a, b] = [0, 1]$, y $f(x) = x^2$, encuentra los valores de m y c donde se alcanza el mínimo.