Cálculo Diferencial e Integral III. Primavera 2023

Laboratorio 10: Multiplicadores de Lagrange

En algunos de los siguientes problemas se usan volúmenes de sólidos de revolución y áreas de superficies de revolución. Recordar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y no negativa, entonces el volumen del sólido de revolución generado al rotar (360 grados) alrededor del eje x la región en el plano xy acotada por el eje x, la curva $y = f(x)$, y las rectas $x = a$, $x = b$, está dado por $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$ (ver las figuras 1 y 2). Similarmente, al rotar 360 grados alrededor del eje x la curva $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, se genera una superficie cuya área está dada por $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Figure 1: La región sombreada se rota 360 grados alrededor del eje x generando un sólido de revolución.

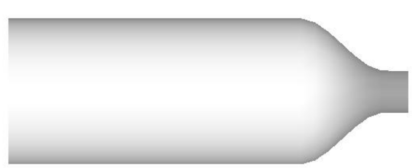

Figure 2: Sólido de revolución generado.

1. Se desea diseñar un cono de papel que se usará para beber agua. La cantidad de agua que debe contener el cono es de 100 ml. Encuentra las dimensiones del cono que usa la mínima cantidad de papel (el cono con área de superficie mínima).

   Nota: el volumen V de un cono con radio de la base r y altura h, está dado por $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$; el área de la superficie de dicho cono es $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Lo anterior se puede deducir al aplicar las fórmulas para volúmenes de sólidos de revolución y áreas de superficies de revolución a la función $y = f(x) = \dfrac{r}{h}x$, para $x \in [0, h]$.

2. Encuentra las dimensiones que maximizan el volumen de una caja rectangular sin tapa cuya superficie es de 192 dm^2.

3. Una fábrica de procesamiento de maíz requiere construir una estructura metálica formada por un cilindro en la base y un cono circular recto en la parte superior. La parte cónica debe tener una altura de 3 metros, como se muestra en la figura. Se especifica que el volumen total contenido en la estructura sea de 1000 m^3. El costo del material en la parte cilíndrica es de 50 pesos por m^2, mientras que en la parte cónica el costo es de 80 pesos por m^2. Se desea encontrar el radio r y altura h del cilindro tales que costo del material de la superficie de la estructura sea mínimo (no tomar en cuenta la base del cilindro).

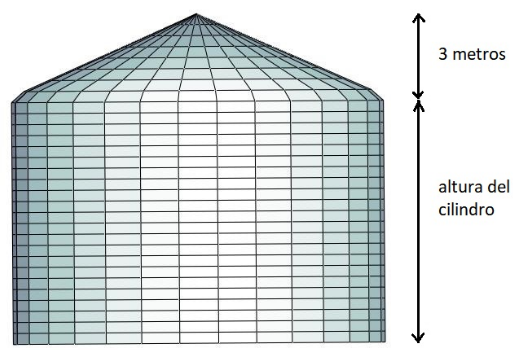

Figure 3: Estructura con base cilíndrica y tapa cónica.

   (a) Plantea el problema con multiplicadores de Lagrange desarrollando las ecuaciones a resolver

   (b) Haz los despejes necesarios para escribir una ecuación en la que aparezca únicamente la variable r, escribe dicha ecuación en la forma $y(r) = 0$.

   (c) Usa un graficador para hacer una gráfica de $y = y(r)$ en el plano $r - y$ en algún intervalo donde la gráfica cruze el eje r (es decir, $y = 0$). Estima el valor de r con una precision de centímetros. Con dicho valor de r, estima la altura del cilindro.

4. Usa los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos de $f(x, y, z) = x + 2yz$ sujeta a las condiciones $y + z = 4$, $x + y = 2$.

5. Encuentra los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las condiciones $2y + 4z = 5$, $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

6. Encuentra el mínimo global y el máximo global de $f(x) = x^3/3 - x + 1$, para $x \in [-2, 0]$.

7. Encuentra el mínimo global y el máximo global de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el disco $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8. Encuentra el mínimo global y el máximo global de $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ en $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$.