### Teorema de Bolzano/ Teorema Valor Intermedio

1. Sea $f : [0,1] \to (0,1)$ una función continua. Pruebe que existe al menos un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

2. Considere una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$, con $a$ y $b$ números reales tales que $a < b$. Mostrar que existe $c \in [a,b]$ de tal forma que $f(c) = c$.

3. Prueba que el polinomio $P(x) = 3x^5 – 2x^2 + 4$ tiene al menos una raíz.

4. Prueba que el polinomio $Q(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$, con $a$ y $b$ parámetros reales, toma el valor $\dfrac{a+b}{2}$ para algún valor de $x$.

5. Encuentra un intervalo de longitud no mayor a $1/4$ en donde se garantice que se encuentra una solución de la ecuación $3x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$.

6. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 \ \text{ y } \ \lim_{x\to\infty} g(x) = -1.$$
Mostrar que existe al menos un punto $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(c) = 0$

### Definición derivada

7. Utiliza la definición de derivada (límites) para encontrar:
   (a) la derivada de $f(x) = \sqrt{x+5}$ en el punto $x = 4$,
   (b) la función derivada de $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

### Funciones diferenciables

8. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1, \\ 2-(x-2)^2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
   (a) Indicar si $f$ tiene discontinuidades removibles.
   (b) Escribir una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea igual a $f$ excepto en el punto $x = 1$ donde se hará que $F$ sea continua.
   (c) Calcular la derivada por la derecha y por la izquierda de $F$ en $x = 1$.
   (d) ¿Es $F$ diferenciable en $x = 1$? Explicar

9. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } \; x \neq 0. \\ 0 & \text{si } \; x = 0, \end{cases}$$

Explicar si $f$ es continua y/o diferenciable en el punto $x = 0$.

10. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x+1} & \text{si } \; x > 0, \\ x^2 + qx & \text{si } \; x \leq 0, \end{cases}$$

con $p$, $q$ números reales.

(a) Determinar todos los valores posibles de $p$ y $q$ de manera que $f$ sea derivable en $x = 0$.

(b) Para los valores de $p$ y $q$ encontrados en el inciso anterior, determinar la función $f'$ (indicar regla de correspondencia y dominio).

**Interpretación geométrica de la derivada**

11. Encuentra la ecuación de la línea recta que tiene pendiente $\frac{1}{4}$ y que es tangente a la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

12. Determina la ordenada y abcisa al origen de la recta perpendicular a la gráfica de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $(1, 2)$.

13. Considere la función real $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a$, $b$ y $c$ parámetros reales. Determinar todos los posibles valores de $a$, $b$ y $c$ de tal forma que la gráfica de la función $f$ pase por el punto $(1, 3)$ y en el origen sea tangente a la recta $y = 2x$.