CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 7
Primavera 2023
Funciones hiperbólicas y sus inversas

1. Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)$.

   (b) $(\cosh(x) + \operatorname{senh}(x))^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$.

2. Determina el dominio y la derivada de la función en cada inciso:

   (a) $f(x) = \coth(\ln x)$.

   (b) $f(x) = \cosh^2(\sqrt{2 - e^x})$.

3. Sean

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \int_{\cos(\theta)}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

   y

$$B(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int_{1}^{\cosh(x)} \sqrt{s^2 - 1}\, ds, \quad x \geq 0.$$

   Prueba que $A(\theta) = \dfrac{\theta}{2}$ para todo θ y $B(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo x. (Sugerencia: $A'(\theta) = \dfrac{1}{2}$ y $B'(x) = \dfrac{1}{2}$ por la regla de Leibniz.)

4. Determina las siguientes integrales y simplifica la respuesta:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} e^t \operatorname{sech}(t)\, dt$.

   (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$.

   (c) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \sqrt{1 + \cosh(x)}\, dx$.

5. Determina el dominio y la derivada de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{senh}^{-1}(x^2 - 1)}$

   (b) $f(x) = \cosh^{-1}(2\sqrt{1 - x})$.

   (c) $f(x) = \tanh^{-1}(1/2)^x$.

6. Simplifica $\cosh\big(\operatorname{senh}^{-1}(x)\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Resuelve la siguiente ecuación (valor explícito de x):

$$\operatorname{senh}^{-1}(x) + \cosh^{-1}(x+2) = 0.$$

8. Considera la función definida por

$$f(x) = 1 + \cosh^{-1}\left(3 - \ln(2x)\right).$$

   (a) Determina el dominio y la imagen de f.

   (b) Demuestra que f es monótona y por tanto posee una inversa.

   (c) Caracteriza la función inversa de f (dominio, imagen y regla de correspondencia).

9. Determina las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x - \operatorname{senh}^{-1}(2x)}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$. Da la respuesta en términos de logaritmos.

   (c) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$. Da la respuesta en términos de logaritmos.

   (d) $\displaystyle\int_4^{7} \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x-5}}.$

10. Halla una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, efectuando el cambio de variable $x = \cosh(t)$.

11. Usando la sustitución $x = \cosh(u)$, demuestra que para $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{\cosh(t)} x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{32}\operatorname{senh}(4t) - \frac{t}{8}.$$