CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 6

Primavera 2023

Función exponencial natural. Logaritmos y exponenciales en otras bases

1. Resuelve la ecuación $3e^x + 2e^{-x} = 7$.
2. Determina la derivada y' en cada inciso:
   (a) $y = \dfrac{1}{e^{2x}\ln x}$.
   (b) $y = \displaystyle\int_1^{e^{(x^2)}} \ln^2\left(\sqrt{t}\right)\, dt$. Simplifica el resultado.
   (c) $y = \displaystyle\int_0^{3x} e^{t^2-9x^2} dt$. Simplifica el resultado.
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = 2e^{3x} + \int_0^x \sqrt{3+2t^4+t^6}\, dt.$$
   (a) Justifica que f es diferenciable.
   (b) Demuestra que f posee una inversa f^{-1} en $\mathbb{R}$.
   (c) Encuentra $\left(f^{-1}\right)'(2)$.
4. Determina la integral en cada inciso:
   (a) $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \sqrt{e^x} dx$.
   (b) $\displaystyle\int \frac{\tan(e^{-3x})}{e^{3x}} dx$.
   (c) $\displaystyle\int e^{(x-e^x)} dx$.
   (d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx$.
   (e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1-e^x} dx$.
5. Sea $f(x) = e^{(2-x)a}e^{xb}$, $a \neq b$. Demuestra que existe $c \in [0,2]$ tal que
$$f(c) = \frac{e^{2b}-e^{2a}}{2b-2a}.$$

6. (a) Obtén las coordenadas del máximo absoluto de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $(0, \infty)$.
   (b) Usando el inciso anterior, demuestra que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$, y $x^e = e^x$ si y sólo si $x = e$.

7. En cada una de las siguientes expresiones despeja y:
   (a) $\log_3(1-y) - \log_3(y) - x = 0, \quad 0 < y < 1$.
   (b) $\dfrac{5^y - 5^{-y}}{2} = 3$.

8. Encuentra el dominio y la derivada de la función en cada inciso:
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(\log_2 x)}$.
   (b) $y = \log_3\left(\dfrac{3^x}{1-3^x}\right)$.
   (c) $y = (2^x + 1)^{1/x}$.
   (d) $y = x^x (\ln x)^{\ln x}$.
   (e) $y = (\ln x)^x + 2^{1/x}$.

9. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 1$, si

$$f(x) = \int_3^{1+2^x} \frac{\log_2(t-1)}{t-1}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. Determina las siguientes integrales:
   (a) $\displaystyle\int e^x\, 10^x\, dx$.
   (b) $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(x)}{x}\,dx$. Simplifica la respuesta.
   (c) $\displaystyle\int_0^{\log_3 2} \frac{1}{1+3^x}\,dx$. Simplifica la respuesta.
   (d) $\displaystyle\int \frac{3^{2x}}{\sqrt{1-3^x}}\,dx$.