

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Laboratorio 5

Primavera 2023

Función logaritmo natural. Funciones inversas

1. Proporciona el dominio de cada función y luego encuentra su derivada:

(a)  $f(x) = (\ln x) \ln(\operatorname{sen} x)$ .

(b)  $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln(1/x)$ .

(c)  $f(x) = \ln(\sqrt{-\ln x})$ .

(d)  $f(x) = \ln^2\left(\frac{3x+2}{x^4}\right)$ .

(e)  $f(x) = \int_x^{x^3} \ln(x^2 - 1) \sqrt{\cos(t) + 1} dt$ .

2. Calcula la derivada  $y'$  de la curva  $y = \ln(xy^2)$  en el punto  $P(e, 1)$ . Sugerencia: utiliza derivación implícita.

3. Determina las siguientes integrales:

(a)  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ . (Observa que  $\ln e = 1$ .)

(b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - 2x}$ .

(c)  $\int \frac{1}{x + x \operatorname{sen}(\ln(x))} dx$ .

(d)  $\int (1 + \ln x) \cot(x \ln x) dx$ .

(e)  $\int_1^8 \frac{dt}{3 + \sqrt{t+8}}$ . Utiliza la sustitución  $u = 3 + \sqrt{t+8}$ .

4. Utiliza derivación logarítmica para encontrar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{(x^2 + 1)^{5/2} \sqrt{2 + \operatorname{sen} x}}, \quad x > 0.$$

5. (a) Prueba que si  $t \geq 1$ , entonces  $\frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ , y de aquí obtén que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2, \quad \text{para toda } x \geq 1.$$

(b) Concluye que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

6. Determina una función diferenciable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que sea par, con  $f(0) = 0$  y tal que

$$\ln(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1 + f(\sqrt{t})} dt, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

7. Sea

$$f(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^2}{1 + t} dt, \quad x > 0.$$

Demuestra que

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln x)^3}{3}.$$

8. En cada inciso justifica que  $f$  es diferenciable y, a partir del signo de la derivada  $f'$ , encuentra los intervalos en los que  $f$  posee una inversa  $f^{-1}$ .

(a)  $f(t) = t^4 + 2t^2 + 1$ .

(b)  $f(x) = \int_{x^2}^x \ln t dt, \quad 0 < x < 1$ .

9. Sea  $f(x) = 3 - \ln(x) + \frac{2}{x}$ .

(a) Justifica que  $f$  posee una inversa  $f^{-1}$  en  $\mathbb{R}^+$ .

(b) Calcula  $\frac{d}{dx} f^{-1}(5)$ .

10. Sea  $f$  una función invertible, con inversa  $f^{-1}$ , y sea  $g = \frac{1}{f^{-1}}$ . Si  $f(2) = -3$  y  $f'(2) = \frac{2}{3}$ , encuentra  $g'(-3)$ .