CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 4
Primavera 2023
Integral por sustitución

1. Determina las siguientes integrales indefinidas usando una sustitución:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\tan x)^5\cos^2 x}$.

   (c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}dx$. Sugerencia: $\displaystyle\sqrt{\frac{x-1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$.

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

   (e) $\displaystyle\int \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$.

2. Calcula las siguientes integrales usando el método del cambio de variable para integrales definidas (haz una sustitución y cambia los límites de integración):

   (a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}|\pi-2x|\,dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0} x\sqrt{1+3x}\,dx$.

3. Demuestra que si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $\lambda \neq 0$ es una constante, entonces:

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x-\lambda)dx$.

   (b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx$.

4. Sea f continua en $[a,b]$. Demuestra que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

5. Sea f continua en $[-a,a]$. Demuestra que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

6. Sea f continua en $\mathbb{R}^+$ y sea

$$H(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\, f\!\left(t+\frac{1}{t}\right)dt.$$

Demuestra que $H\,(1/x) = -H(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

7. Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y f continua en $[0,a]$.

   (a) Usa la sustitución $u = a - x$ para demostrar que

   $$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}du.$$

   (b) Usa la parte (a) para demostrar que

   $$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}.$$

   (¡El valor de la integral no depende de f!)

   (c) Usa la parte (b) para obtener el valor de

   $$\int_0^1 \frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx.$$

8. Sean g diferenciable en $\mathbb{R}$, f continua en $\mathbb{R}$ y

$$h(x) = x^2 \int_{g(x)}^{g(x^3)} f(t)dt.$$

   (a) Justifica que h es diferenciable y calcula su derivada.

   (b) Si f y g son impares, justifica si h es una función par, una función impar, o ninguna de éstas.