Conceptos continuidad/discontinuidad

1. Define qué es una función continua en $x = a$.

2. Argumenta la continuidad, en cada punto de su dominio, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. Discontinuidades. En los siguientes ejemplos dar el dominio de la función f, regla de correspondencia de f y el punto a de interés en el dominio de f. Además, verificar que las propiedades pedidas se cumplen.

   (a) *Discontinuidad removible.* Da un ejemplo de una función f y el punto a tal que el límite de f cuando x tiende a a exista pero sea diferente de $f(a)$.

   (b) *Discontinuidad de salto.* Da un ejemplo de una función f para la cual los límites laterales de f cuando x tiende a a existan pero sean diferentes.

   (c) Da un ejemplo de una función f para la cual solamente uno de los límites laterales cuando x tiende a a no exista.

   (d) Da un ejemplo de una función f para la cual ninguno de los límites laterales cuando x tiende a a exista.

Asíntotas

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x}{2x^3 + 3x^2 - 2x},$$

obtener dominio, raíces, intervalos de continuidad, clasificación de las descontinuidades, asíntotas verticales, asíntotas horizontales y bosquejar la gráfica.

5. Considere la función

$$f(x) = \frac{(x - l)^2}{x^2 - 4}$$

donde l es un parámetro real.

   (a) Determinar el dominio de f y explicar si este depende o no del valor de l.

   (b) Clasificar las discontinuidades de f en función del valor de l.

Ejercicios continuidad

6. Encuentra, si los hay, todos los posibles valores de c para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} x + c, & \text{si } x \leq -1, \\ \dfrac{x+2-x^2}{2x+2}, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

sea continua en todo su dominio. Si f es continua para alguna c, dibuja la gráfica correspondiente.

7. Determina todos los valores posibles de c_1, c_2 y c_3 de tal forma que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{si } x < -3, \\ c_1, & \text{si } x = -3, \\ c_2 x + c_3, & \text{si } x > -3, \end{cases}$$

sea continua.

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \leq 1, \\ x + b, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ g(x-1) + 2b, & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

donde g es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Determinar b de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.