Segundo Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2022

NOMBRE:____ CU:________

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/7 cada una).
Examen Tipo B. Duración: 2 horas

1. Determina los puntos críticos de $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - 4y + \dfrac{3}{2}x^2 - 3xy + \dfrac{3}{2}y^2$ y clasifícalos como mínimo local, máximo local o punto silla.

2. Encuentra los puntos críticos de $f(x,y,z) = \dfrac{z^2}{6} + y^3 + x^2 - zy + 2x$ y clasifícalos como máximo local, mínimo local, punto silla.

3. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2, $w = f(x,y)$, y $x = u^2 - 3uv$, $y = v^2 + 2u$, encuentra una expresión para $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ en términos de derivadas parciales de f.

4. Sea $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 en un abierto U, $u = u(x,y)$. Se dice que u es armónica si u satisface la ecuación de Laplace:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } U.$$
Decide si $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ es armónica o no en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. (justificar)

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,-1)$. Supón que en el punto (x_0, y_0) las derivadas direccionales (o razones de crecimiento) de f en las direcciones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ valen 3 y -1 respectivamente. Encuentra la dirección de máximo crecimiento de f en el punto (x_0, y_0).

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3xy + x^3$. Dibuja en el plano xy el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la matriz hessiana de f en (x,y), $H_f(x,y)$, es definida negativa.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy^2 - xy + e^{y-2x}$. Encuentra la aproximación cuadrática $Q = Q(x,y)$ de f alrededor del punto $(1,2)$. Encuentra el valor de $Q(1, 3/2)$.