Primer Parcial Departamental . Cálculo Diferencial e Integral III.
Otoño 2022

NOMBRE:____ CU:________

i) No se permite el uso de calculadoras.
ii) Cada pregunta vale lo mismo (1/8 cada una).
Examen Tipo B. Duración: 2 horas

1. Sea $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $z = z(x, y)$, tal que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(5, 2) = -2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(5, 2) = 3$. Si $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $w(u, v) = z(u^2 + v^2, uv)$, calcula el valor de $\dfrac{\partial w}{\partial v}(1, 2)$.

2. El vector posición al tiempo t para una partícula que se mueve en el espacio xyz es $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2t - t^2, t^2 - 1, t^2)$.
   (a) Encuentra el vector velocidad de la partícula en el instante $t_0 = 3$.
   (b) Encuentra una parametrización para la recta tangente a la curva descrita por la trayectoria $\mathbf{r}$ al tiempo $t_0 = 3$.
   (c) ¿En qué punto la recta tangente intersecta al plano xy?

3. Usa la regla de la cadena para calcular $\mathrm{D}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(-1, 1)$ con $\mathbf{F}(u, v, w) = (v^2 - uw, u^2 + w^2, u - w^2)$ y $\mathbf{G}(x, y) = (xy^2, x^2 - y^2, 3x + 5y)$.

4. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{y^3}{x^2 + y^2}, \dfrac{y^4 - x^4}{x^4 + y^4} \right)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, y $\mathbf{F}\ (0, 0) = (0, 0)$. Demuestra que $\mathbf{F}$ no es continua en $(0, 0)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2y + 2x + 4y^2 + b$, donde a, b son constantes. Encuentra los valores de a y b si se cumple lo siguiente:
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 4$.
   - El punto $P(1, 1)$ pertenece a la curva de nivel correspondiente al valor (o nivel) 2.

6. Determina y dibuja el conjunto de nivel de $f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$ asociado al nivel 0.

7. Sea $f(x, y, z) = \|(x, y, z)\|^2 + \|(x, y, z)\|^4$, donde $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Demuestra que $\nabla f(x, y, z) = 2(1 + 2\|(x, y, z)\|^2)(x, y, z)$.

8. Encuentra el punto de la superficie $z = 16 - 4x^2 - y^2$ donde el plano tangente a dicha superficie es perpendicular al vector $(4, 2, -1)$. Encuentra la ecuación de dicho plano tangente.