

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Laboratorio 3

Primavera 2023

Teorema Fundamental del Cálculo

1. Halla la derivada de la función en cada inciso (sin integrar):

(a) $G(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^4} dt.$

(b) $G(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^4} dt.$

(c) $G(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1+s^4} ds \right)^2.$

(d) $G(x) = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+t^4} dt.$

(e) $G(x) = \int_0^x x^2 \sqrt{1+t^4} dt.$

(f) $G(x) = \int_{-2x}^{2x} \sqrt{1+t^4} dt.$

(g) $G(t) = \int_{t^2}^{t^4} \frac{t^2}{1+\sqrt{x}} dx.$

2. Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{x \operatorname{sen} t}{t} dt$ en $x = \frac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\frac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt.$$

Muestra que $f'''(x) = 2f(x)$.

4. Determina una función continua $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y una constante $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 20 = 5x^{1/2}.$$

5. Calcula $f(2)$, si f es continua y tal que

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x^2(1+x), \quad x \geq 0.$$

6. Para $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ define

$$S(\theta) = \int_0^{\operatorname{sen} \theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Usa la regla de Leibniz para probar que $S'(\theta) = 1$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Concluye que $S(\theta) = \theta$ para todo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

7. Sea f continua en $[a, b]$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt.$$

Sugerencia: Considera la función $g(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$g(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t) dt.$$

(a) Demuestra que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Justifica que g es diferenciable en \mathbb{R} y entonces calcula $g'(x)$.

9. Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{5}{x^3} \right) dx.$

(b) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\csc x}.$

(c) $\int_0^{\pi/4} \sec x \tan x dx.$

(d) $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^5 x \right) dx.$