CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
Laboratorio 2
Primavera 2023
Propiedades de la integral definida. Teorema del Valor Medio para Integrales

1. Calcula $\int_{-2}^{2}(2x+1+|2x+1|)\,dx$.

2. Determina $\int_{-2}^{a}|x|\,dx$. Analiza los casos $a \leq 0$ y $a > 0$.

3. Prueba que $\dfrac{x^6}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^6$, si $x \in [0,1]$. Concluye que
$$\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}.$$

4. A partir de las desigualdades
$$1-\frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1,$$
obtén cotas superior e inferior para $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

5. Sin efectuar la integral, demuestra que $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4 x\,dx \geq \frac{\pi}{8}$.

6. Demuestra que si f es integrable en $[a,b]$, entonces
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$
Sugerencia: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

7. Sean $0 \leq a < b$ y $f(x)=x^2$.
   (a) Muestra que el valor promedio de f en $[a,b]$ es $\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$.
   (b) Muestra que existe un número $c \in [a,b]$ tal que $c^2=\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$.

8. Sea $f(x)=|2x+1|$, encuentra todos los reales c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para f en $[-1,0]$.

9. Sea $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ continua, tal que $\int_1^3 f(x)\,dx=4$. Prueba que existe $c \in [1,3]$ tal que $f(c)=2$.

10. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas, tales que $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=0$. Prueba que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=g(c)$.

11. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Sugerencia: para el caso $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, encuentra cotas inferior y superior para el cociente $\int_a^b f(x)g(x)\,dx / \int_a^b g(x)\,dx$ y luego utiliza el TVI.