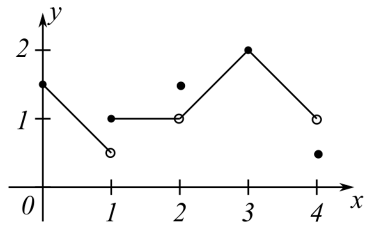
Existencia de límites

1. Para la función cuya gráfica está abajo determina los límites laterales en $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Obtén todos los números reales a en el intervalo $[1, 4]$ para los cuales el límite en $x = a$ existe.



2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } -3 < x < -1, \\ 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   (a) Grafica $f(x)$,

   (b) Determina los siguientes límites

$$\lim_{x \to 1^+} f(x), \quad \lim_{x \to 1^-} f(x), \quad \lim_{x \to -1^+} f(x), \quad \lim_{x \to -1^-} f(x), \quad \lim_{x \to -3^+} f(x),$$

   (c) ¿En qué puntos de $\mathrm{Dom}(f)$ existe el límite?

   (d) Determina explícitamente la función $g(x) = 3f(2x-2)+4$, grafícala y determina en qué puntos de $\mathrm{Dom}(g)$ existe el límite.

3. Da un contraejemplo si la proposición es falsa, es decir, un ejemplo que sustente la falsedad de la proposición. Si es verdadera la proposición justifica.

   (a) Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y $\lim_{x \to a} g(x)$ no existe entonces $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ no existe.

   (b) Si ninguno de los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existe entonces $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ no existe.

4. De las siguientes afirmaciones, indica cuál siempre es cierta (argumenta), cuál puede ser cierta (da un ejemplo donde sea cierta y otro donde no lo sea) y cuál nunca puede ser cierta (argumenta).

   - $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.
   - Si $\lim_{x \to -7} f(x) = -2$ entonces $\lim_{x \to -7} f^3(x) = -8$.
   - Si $\lim_{x \to 5} f(x) = 8$ entonces $\lim_{x \to 5} 1/f(x) = 1/8$.
   - Si $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 4$ y $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 8$ entonces $\lim_{x \to 5} f(x) = 6$.

- Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ entonces $f(0) = 0$.
- Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ entonces $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe y es igual a 0.

Propiedades de límites

5. Supón que $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Calcula, si existen, los límites en $a = 4$ de $g(x)+3$, $(g(x))^2$, $xf(x)$, $\frac{g(x)}{f(x)-1}$.
6. Supón que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$. Calcula, si es que existen,
$$\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x),\quad \lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x),\quad \lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4),\quad \lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4).$$
7. Utiliza propiedades de límites para demostrar que si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{1+3f^2(x)}{g^2(x)}$ existe.
8. Supón que $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$, utiliza propiedades de los límites para demostrar que $\lim_{t\to 0} \frac{t^2}{f(t)} = 0$
9. Prueba que si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ entonces $\lim_{x\to 2} f(x+1) = 4$.

Cálculo de límites

10. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado. Primero realiza un análisis cualitativo para determinar existencia o posible valor del límite.

- $\lim_{x\to 4} \frac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- $\lim_{t\to -2} \frac{-3 + \sqrt{-2t+5}}{\sqrt{11+t} - 3}$
- $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}$
- $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7} - 4}$
- $\lim_{h\to 1} \frac{\sqrt{b+2(h-1)} - \sqrt{b}}{h-1}$, $b > 0$